

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

MAURICE ROSEAU

1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES ONDES LIQUIDES DE GRAVITÉ
EN PROFONDEUR VARIABLE

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

THÉORÈMES ERGODIQUES

Soutenues le 20 décembre 1951 devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. H. VILLAT	{	Président.
		J. PÉRÈS		Examineurs.
		G. VALIRON		

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

MAURICE ROSEAU

1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES ONDES LIQUIDES DE GRAVITÉ
EN PROFONDEUR VARIABLE

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

THÉORÈMES ERGODIQUES

Soutenues le 20 décembre 1951 devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. H. VILLAT	{	Président.
		J. PÉRÈS		Examinateurs.
		G. VALIRON		

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CONTRIBUTION

A

LA THÉORIE DES ONDES LIQUIDES DE GRAVITÉ
EN PROFONDEUR VARIABLE



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552427_0049

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. A. CHATELET

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.	COULOMB	T	Physique du globe.
A. DENJOY	T	Théorie des fonctions.	M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (P.C.B.).
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.	CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
E. DARMOIS	T	Enseignement de physique.	P. DRACH	T	Zoologie.
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée.	KASTLER	T	Physique.
M ^{me} RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	CHATELET	T	Arithmétique et théorie des nombres.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	EPHRUSSI	T	Génétique.
PAUTHENIER	T	Électrotechnique générale.	WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	BAUER	T	Chimie-physique.
JOB	T	Chimie générale.	RIVIÈRE	T	Géologie (P.C.B.).
PRENANT	T	Anatomie et histologie comparées.	GAUTHIERET	T	Biologie végétale (P.C.B.).
COMBES	T	Physiologie végétale.	LUCAS	T	Physique.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	A. THOMAS	T	Évolution des êtres organisés.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	ARNULF	T	Optique appliquée.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	Max MORAND	T	Physique.
TOUSSAINT	T	Technique aéronautique.	SOLEILLET	T	Physique.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
G. RIBAUD	T	Hautes températures.	DANJON	T	Astronomie.
CHAZY	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.	FROMAGEOT	T	Chimie biologique.
CROZE	T	Physique théorique et physique céleste.	LAPORTE	T	Physique générale et radio-activité.
DUPONT	T	Théories chimiques.	JANET	T	Mathématiques générales.
VALIRON	T	Calcul différentiel et calcul intégral.	PETIT	T	Biologie maritime.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.	GALLIEN	T	Biologie animale (P.C.B.).
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.	EICHHORN	T	Biologie végétale (P.C.B.).
Jacques BOURGART	T	Géographie physique et géologie dynamique.	DE CUGNAC	T	Biologie végétale (P.C.B.).
AUBEL	T	Chimie biologique.	LAVAL	T	Physique (P.C.B.).
M ^{me} JOLIOT-CURIE	T	Physique générale et radio-activité.	M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie-physique.
PLANTEFOL	T	Botanique.	THELLIER	T	Physique du globe.
CABANNES	T	Recherches physiques.	AUDUBERT	T	Électrochimie.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	L'HÉRITIER	T	Génétique.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	GRIVET	T	Radio-électricité.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la géométrie.	PONCIN	T	Mécanique des fluides.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	THIRY	T	Mécanique appliquée.
WYART	T	Minéralogie.	DUBREIL	T	Mathématiques générales.
TEISSIER	T	Zoologie.	QUELET	T	Chimie (P.C.B.).
MANGENOT	T	Biologie végétale.	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	CHAMPETIER	T	Chimie appliquée.
MONNIER	T	Physiologie générale.	CUVILLIER	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
PIVETEAU	T	Géologie.	JUNG	T	Pétrographie.
ROCARD	T	Physique.	TRILLAT	T	Physique (P.C.B.).
H. CARTAN	T	Mathématiques (E. N. supérieure).	WIEMANN	T	Chimie (P.C.B.).
SCHAEFFER	T	Physiologie des fonctions.	LICHNEROWICZ	T	Mathématiques générales.
LAFFITTE	T	Chimie générale.	JACQUINOT	T	Physique (P.C.B.).
FAYARD	T	Mécanique générale.	VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
			DESTOUCHES	T	Théories physiques.
			M. PRUVOST	T	Géologie.
			AMIEL	T	Chimie (P.C.B.).
			HOCART	T	Minéralogie.
			MACHEBŒUF	T	Microbiologie.
			J.-P. MATHIEU	T	Physique (P.C.B.).
			COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.).
			MAY	T	Biologie animale (P.C.B.).

Secrétaire Ch. MONIER

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LEIDE



A Monsieur Henri VILLAT,

Membre de l'Institut

A Monsieur Joseph PÈRÈS,

Membre de l'Institut

A Monsieur Georges VALIRON,

Professeur à la Sorbonne

A mes Parents

A ma Sœur

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
AVANT-PROPOS	1
CHAPITRE PREMIER	
Généralités sur les ondes liquides de gravité	3
CHAPITRE II	
Ondes liquides de gravité sur une plage — Méthode de l'équation intégrale	9
I. — Étude du cas bidimensionnel	9
II. — Étude du cas tridimensionnel	15
CHAPITRE III	
Ondes liquides de gravité sur une plage dans le cas bidimensionnel — Méthode de l'équation différentielle	23
CHAPITRE IV	
Ondes liquides de gravité sur une plage inclinée de 45° sous l'horizontale dans le cas tridimensionnel	27
CHAPITRE V	
Ondes liquides de gravité sur une plage dans le cas bidimensionnel	31
I. — Position du problème — Forme de la solution	31
II. — Interprétation des conditions aux limites	33
III. — Calcul de g (ζ)	34
IV. — Comportement des solutions à l'origine et à l'infini	41
V. — Extension des solutions au cas $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	42
CHAPITRE VI	
Ondes liquides de gravité sur une plage dans le cas tridimensionnel	47
I. — Notations et méthode de solution	47
II. — Étude des conditions aux limites	48
III. — Calcul de g (ζ)	50

	PAGES
IV. — Étude du comportement des solutions au voisinage de l'origine et à l'infini	55
V. — Extension des solutions au cas $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	59

CHAPITRE VII

Ondes liquides de gravité dans un canal de profondeur variable — Mouvements ondulatoires de l'eau sur une plage inclinée dont la profondeur au large est constante..	61
I. — Introduction	61
II. — Étude géométrique du fond	63
III. — Notation et recherche de la solution	67
IV. — Études des équations fonctionnelles :	
$\frac{H(u+i)}{H(u)} = \frac{u \operatorname{th} \alpha u - b}{(u+i) \operatorname{th} \alpha (u+i) - a}$ et } $\frac{K(u+i)}{K(u)} = \frac{u \operatorname{th} \alpha u - a}{(u+i) \operatorname{th} \alpha (u+i) - b}$	69
V. — Retour sur le calcul de U et de V — Choix des contours C et Γ et des constantes l, m, p, q	79
VI. — Comportement asymptotique des solutions.....	81
BIBLIOGRAPHIE.....	91

AVANT-PROPOS

Pendant l'année 1950 j'eus l'heureuse fortune d'être amené à l'étude de quelques problèmes de la théorie des ondes liquides de gravité grâce aux remarquables leçons professées à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris par M. le Professeur H. VILLAT.

Ce travail qui, déjà, tire son origine de l'enseignement lumineux de M. H. VILLAT, doit beaucoup aux encouragements qui me furent prodigués aussi bien par lui que par M. le Professeur J. PÉRÈS, et au soutien dont ceux-ci accompagnèrent mes efforts.

Aussi je les prie tous deux d'accepter l'hommage de ma gratitude.

J'exprime ma reconnaissance à M. le Professeur G. VALIRON qui m'a fait l'honneur de faire partie de mon jury de thèse et j'adresse mes vifs remerciements à M. l'Ingénieur en Chef VERNOTTE qui a bien voulu accueillir ce mémoire dans la collection qu'il dirige.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ONDES LIQUIDES DE GRAVITÉ

On se propose de faire l'étude des mouvements ondulatoires d'un fluide incompressible avec surface libre quand les effets de la pesanteur ne sont plus négligeables.

Adoptant un système d'axes rectangulaires $Oxyz$, Oy verticale ascendante, la surface libre du liquide peut être représentée par l'équation :

$$y = \eta(x, z, t).$$

D'ailleurs, dans les conditions usuelles où les mouvements étudiés sont de faible amplitude, les points de la surface libre se trouvent distribués au voisinage d'un plan horizontal représentant la surface libre moyenne, plan dans lequel on suppose avoir pris les axes Ox et Oz .

Supposant le mouvement irrotationnel, il existe un potentiel des vitesses $\Phi(x, y, z, t)$, et les composantes u, v, w de la vitesse de la molécule de liquide située à l'instant t au point x, y, z sont :

$$(1) \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

D'après l'équation de continuité, $\Phi(x, y, z, t)$ vérifie l'équation :

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Examen des conditions aux limites.

Le fluide est limité inférieurement par une surface d'équation :

$$y = -h(x, z), \quad h(x, z) > 0$$

qui représente le fond.

En tout point du fond on a :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

ou :

$$(3) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} h_x + \frac{\partial \Phi}{\partial z} h_z + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

D'autre part, d'après le théorème de Bernoulli on peut écrire :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} = U + C(t),$$

p étant la pression au point x, y, z, t , ρ la masse spécifique du liquide et $U(x, y, z, t)$ la fonction de forces dont on suppose que les forces de masse dérivent.

Dans le cas envisagé ici on a $U = -gy$, g accélération de la pesanteur.

En outre, il n'y a pas d'inconvénient à supposer $C(t) = 0$, quitte à modifier Φ d'une fonction de t .

Finalement, le théorème de Bernoulli se traduit par l'équation :

$$(4) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gy = 0.$$

Écrivant que la pression est constante sur la surface libre, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

sur :

$$y = \eta(x, z, t)$$

on obtient, en utilisant les équations (1) et (4) :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right. \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} \left. \right] \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} \right. \\ & + \left. g + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial y} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial z} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right.$$

sur :

$$(6) \quad y = \eta(x, z, t).$$

Première approximation.

Le problème ainsi posé est très complexe à cause de la nature de la condition (5) qui doit être appliquée sur une surface qu'on ne connaît pas *a priori*.

Dans le cas où les mouvements du fluide sont petits on simplifie grandement la question en ne gardant dans la condition (5) que les termes du premier ordre et en appliquant la condition ainsi linéarisée non plus sur la véritable surface libre, mais sur le plan $y = 0$ qui en diffère peu.

C'est-à-dire :

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{sur} \quad y = 0.$$

Les équations de base sont alors les suivantes :

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon^2 \Phi}{\partial z^2} = 0;$$

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{sur} \quad y = 0;$$

$$(10) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + h_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + h_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{sur} \quad y = -h(x, z).$$

La fonction $\eta(x, z, t)$ qui représente l'écart de la surface libre par rapport au plan xOz peut se calculer en partant de :

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial x} u + \frac{\partial \eta}{\partial z} w + \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

équation qui, linéarisée, se réduit à :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{sur} \quad y = 0,$$

ou par (7) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{pour} \quad y = 0.$$

Deuxième approximation — Mouvements en eau peu profonde.

Dans le cas où la profondeur $h(x, z)$ est petite on peut encore réaliser des approximations supplémentaires.

Pour simplifier l'écriture on désigne par $\bar{\psi}$ et $\underline{\psi}$ les valeurs prises par toute fonction $\psi(x, y, z, t)$, respectivement en tout point de la surface libre moyenne $y = 0$ et en tout point du fond :

$$y = -h(x, z).$$

Posant :

$$A = \int_{-h}^0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy = \frac{\bar{\partial \Phi}}{\partial y} - \frac{\varepsilon \Phi}{\underline{\partial y}},$$

on a par (8) :

$$A = - \int_{-h}^0 \left(\frac{\varepsilon^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) dy = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-h}^0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{-h}^0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} dy \right) + h_x \cdot \frac{\partial \Phi}{\underline{\partial x}} + h_z \cdot \frac{\partial \Phi}{\underline{\partial z}},$$

et tenant compte de (10) :

$$(11) \quad \frac{\bar{\partial \Phi}}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-h}^0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{-h}^0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} dy \right).$$

Mais :

$$\int_{-h}^0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy = \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{-h}^0 - \int_{-h}^0 y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dy = h \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \int_{-h}^0 y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dy$$

et :

$$h \int_{-h}^0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dy = h \frac{\partial \Phi}{\partial x} - h \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

On a donc :

$$\int_{-h}^0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy = h \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \int_{-h}^0 (y + h) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dy$$

et de même :

$$\int_{-h}^0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} dy = h \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \int_{-h}^0 (y + h) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} dy,$$

et portant ces expressions dans (11) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(h \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^0 (y + h) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-h}^0 (y + h) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} dy.$$

En négligeant les deux derniers termes et tenant compte de (9) on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(gh \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(gh \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right).$$

Mouvements harmoniques.

Un cas très important est celui où :

$$\Phi(x, y, z, t) = e^{i\sigma t} \varphi(x, y, z).$$

Les équations (8), (9), (10) deviennent :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\sigma^2}{g} \cdot \varphi \quad \text{sur} \quad y = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur le fond.}$$

On peut supposer $\frac{\sigma^2}{g} = 1$ quitte à multiplier les coordonnées par le même nombre.

CONCLUSION.

Ce travail a pour objet la recherche des potentiels qui représentent les petits mouvements harmoniques d'un liquide dans le cadre de la première approximation et pour diverses formes de fond.

Hormis les cas de profondeur constante ou infinie, le seul problème qui ait été traité jusqu'ici est celui où le fond est une plage inclinée de l'angle α sous l'horizontale, dans le cas bidimensionnel (φ indépendant de z).

A. MICHE [1] et J. J. STOKER [2] trouvèrent les solutions dans le cas $\alpha = \frac{\pi}{2q}$, q entier.

H. LEWY [3] les étendit au cas $\alpha = p \frac{\pi}{2q}$, p impair, q entier et E. ISAACSON [4] supposant la continuité de φ par rapport à α déduisit des solutions de LEWY, les solutions pour α quelconque, toujours dans le cas bidimensionnel.

Nous avons obtenu la solution générale de ce problème pour toute valeur de α dans les deux cas bidimensionnel et tridimensionnel.

Dans les chapitres II, III et IV on trouvera l'exposé de quelques méthodes d'approche (réduction à une équation intégrale ou à une équation différentielle) qui ont permis d'obtenir d'abord des solutions partielles.

Puis, dans les chapitres V et VI est exposée la méthode générale de solution basée essentiellement sur une transformation fonctionnelle et la résolution d'équations aux différences.

Dans le chapitre VII, en s'inspirant d'une méthode analogue, nous avons construit dans le cas bidimensionnel les solutions d'un problème plus général correspondant à un canal indéfini dont le fond dépend de trois paramètres, les profondeurs constantes en amont et en aval h_1 et h_2 , et un paramètre α caractéristique de la pente maximum de la courbe de raccordement entre l'amont et l'aval.

On a notamment obtenu comme cas particulier les solutions dans le cas d'une plage inclinée de l'angle α sous l'horizontale et de profondeur constante au large.

CHAPITRE II

ONDES LIQUIDES DE GRAVITÉ SUR UNE PLAGE MÉTHODE DE L'ÉQUATION INTÉGRALE

I. — ÉTUDE DU CAS BIDIMENSIONNEL

Cherchant à représenter le potentiel du mouvement par $\Phi = e^{i\sigma t} \cdot \varphi(x, y)$ on est conduit aux équations :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{dans le secteur } xOt,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi, \quad y = 0, \quad x > 0 \quad (\text{variables sans dimension}),$$

$$\sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad y + x \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad x > 0 \text{ (fig. 1).}$$

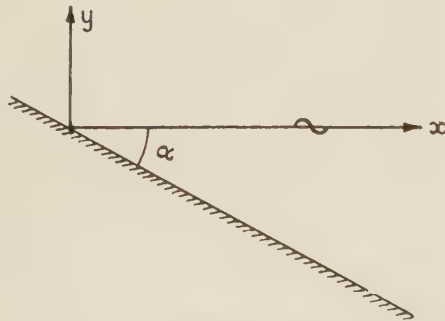


Fig. 1

Par la transformation :

$$z = e^{\zeta}, \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

et posant :

$$\chi(\xi, \eta) = \varphi(e^{\xi} \cos \eta, e^{\xi} \sin \eta),$$

on remplace les équations qui précèdent par (fig. 2) :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} = 0, \quad -\alpha < \eta < 0;$$

$$(2) \quad \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = e^{\lambda \chi}, \quad \eta = 0;$$

$$(3) \quad \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = -\alpha.$$

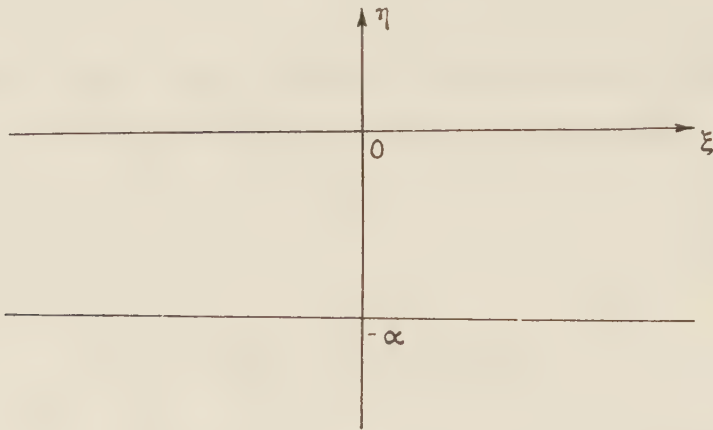


Fig. 2

Recherche d'une fonction de Green.

On recherche une fonction de Green $G(\xi, \eta; \xi', \eta')$ définie dans la bande $-\alpha \leq \eta \leq 0$, $-\alpha \leq \eta' \leq 0$ et telle que $\frac{\partial G}{\partial \eta'} = 0$ sur $\eta' = 0$ et $\eta' = -\alpha$.

Posons :

$$G(\xi, \eta; \xi', \eta') = \sum_1^\infty \frac{e^{-n \frac{\pi}{\alpha} |\xi - \xi'|}}{n} \cdot \cos n \frac{\pi}{\alpha} \eta \cdot \cos n \frac{\pi}{\alpha} \eta'$$

ou encore :

$$2G = \sum_1^\infty \frac{e^{-n \frac{\pi}{\alpha} |\xi - \xi'|}}{n} \cdot \cos n \frac{\pi}{\alpha} (\eta + \eta') + \sum_1^\infty \frac{e^{-n \frac{\pi}{\alpha} |\xi - \xi'|}}{n} \cdot \cos n \frac{\pi}{\alpha} (\eta - \eta'),$$

c'est-à-dire :

$$2G = -\operatorname{Re} L(1 - e^{-(\lambda + i\mu)})(1 - e^{-(\lambda + i\nu)}),$$

avec :

$$\lambda = \frac{\pi}{\alpha} |\xi - \xi'|, \quad \mu = \frac{\pi}{\alpha} (\eta + \eta'), \quad \nu = \frac{\pi}{\alpha} (\eta - \eta').$$

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

1° G est symétrique par rapport aux couples de variables $\xi, \eta; \xi', \eta'$;

$$2^\circ \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta'^2} = 0;$$

$$3^\circ \quad \frac{\partial G}{\partial \eta'} = 0 \quad \text{sur} \quad \eta' = 0 \quad \text{et} \quad \eta' = -\alpha;$$

4° $G \sim -\frac{1}{2} L \rho$ avec $(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 = \rho^2$ quand $\rho \rightarrow 0$;

5° G et $\frac{\partial G}{\partial \xi'}$ sont de l'ordre de $e^{-\frac{\pi}{\alpha}|\xi'|}$ quand $|\xi'| \rightarrow \infty$;

6° Enfin, il est essentiel de remarquer que si G et $\frac{\partial G}{\partial \eta'}$ sont continues partout dans la bande $-\alpha < \eta' < 0$ (en évitant toutefois le point ξ, η), on ne peut en dire autant de $\frac{\partial G}{\partial \xi'}$ qui est discontinue sur le segment :

$$\xi' = \xi, \quad -\alpha \leq \eta' \leq 0.$$

En effet :

1° $\xi' > \xi$:

$$2 \frac{\partial G}{\partial \xi'} = -\frac{\pi}{\alpha} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-(\lambda+i\mu)}}{1 - e^{-(\lambda+i\mu)}} + \frac{e^{-(\lambda+i\nu)}}{1 - e^{-(\lambda+i\nu)}} \right\}$$

et quand $\xi' \searrow \xi$:

$$2 \frac{\partial G}{\partial \xi'} \rightarrow \frac{\pi}{\alpha} ;$$

2° $\xi' < \xi$:

$$2 \frac{\partial G}{\partial \xi'} = \frac{\pi}{\alpha} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-(\lambda+i\mu)}}{1 - e^{-(\lambda+i\mu)}} + \frac{e^{-(\lambda+i\nu)}}{1 - e^{-(\lambda+i\nu)}} \right\}$$

quand $\xi' \nearrow \xi$:

$$2 \frac{\partial G}{\partial \xi'} \rightarrow -\frac{\pi}{\alpha}.$$

Détermination de χ (ξ, η).

Transformons les intégrales doubles de $G \Delta \chi - \chi \Delta G$ étendues aux domaines I

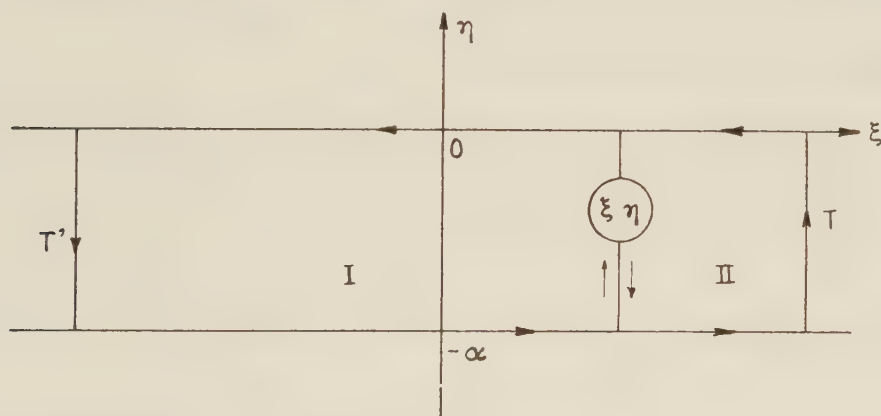


Fig. 3

et II (fig. 3), par le théorème de Green et ajoutons les résultats obtenus. :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta'^2},$$

$$\iint (G \Delta \chi - \chi \Delta G) d\xi' d\eta' = \int \left\{ \left(G \frac{\partial \chi}{\partial \xi'} - \chi \frac{\partial G}{\partial \xi'} \right) d\eta' - \left(G \frac{\partial \chi}{\partial \eta'} - \chi \frac{\partial G}{\partial \eta'} \right) d\xi' \right\},$$

d'où l'on déduit :

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, \eta; \xi', 0) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \eta'}(\xi', 0) d\xi' + \frac{\pi}{\alpha} \int_{-\alpha}^0 \chi(\xi, \eta') d\eta' - \pi \chi(\xi, \eta).$$

(Les intégrales prises sur les côtés latéraux T et T' tendent vers 0 quand T et T' s'éloignent à l'infini pourvu que $|\chi|$ et $\left| \frac{\partial \chi}{\partial \xi'} \right|$ soient inférieurs pour ξ' grand à $Me^{\beta|\xi'|}$ avec $\beta < \frac{\pi}{\alpha}$).

Tenant compte de la condition (2) on obtient l'équation :

$$\chi(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, \eta; \xi', 0) \cdot e^{\xi'} \cdot \chi(\xi', 0) d\xi' + \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha}^0 \chi(\xi, \eta') d\eta'$$

qui s'écrit pour $\eta = 0$, avec $\chi(\xi, 0) = \chi(\xi)$:

$$\chi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, 0; \xi', 0) \cdot e^{\xi'} \cdot \chi(\xi') d\xi' + \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha}^0 \chi(\xi, \eta') d\eta'$$

d'où, par soustraction :

$$(4) \quad \chi(\xi, \eta) = \chi(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\xi, \eta; \xi', 0) - G(\xi, 0; \xi', 0)] e^{\xi'} \chi(\xi') d\xi',$$

équation qui exprime $\chi(\xi, \eta)$ en fonction de $\chi(\xi)$, c'est-à-dire le potentiel au sein du fluide en fonction du potentiel à la surface.

Équation intégrale vérifiée par $\chi(\xi)$.

On s'assure facilement que la fonction $\chi(\xi, \eta)$ définie par (4) vérifie les conditions aux limites (2) et (3).

Mais il faut examiner la condition (1).

Or, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} &= \frac{d^2}{d\xi^2} \left[\chi(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L \left(1 - e^{-\frac{\pi}{\alpha}|\xi-\xi'|} \right) \cdot e^{\xi'} \cdot \chi(\xi') d\xi' \right] \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, \eta; \xi', 0) \cdot e^{\xi'} \cdot \chi(\xi') d\xi'. \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire donne :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, \eta; \xi', 0) \cdot e^{\xi'} \cdot \chi(\xi') d\xi' = \frac{\pi}{\alpha} \cdot e^{\xi} \cdot \chi(\xi)$$

(à cause de la discontinuité de $\frac{\partial G}{\partial \xi'}$).

Posons :

$$\omega(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi} \chi(\xi)$$

et :

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} L \left(1 - e^{-\frac{\pi}{\alpha} |\xi - \xi'|} \right) \cdot \omega(\xi') d\xi';$$

on a :

$$\frac{dS}{d\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} L \left(1 - e^{-\frac{\pi}{\alpha} |\xi - \xi'|} \right) \cdot \dot{\omega}(\xi') d\xi', \quad \dot{\omega}(\xi') = \frac{d\omega}{d\xi'}$$

ou :

$$\frac{dS}{d\xi} = - \int_{-\infty}^{\xi} \omega(\xi') dL \left(1 - e^{-\frac{\pi}{\alpha} (\xi - \xi')} \right) - \int_{\xi}^{+\infty} \omega(\xi') dL \left(1 - e^{-\frac{\pi}{\alpha} (\xi' - \xi)} \right),$$

$$\frac{dS}{d\xi} = \frac{\pi}{\alpha} \int_{-\infty}^{\xi} \omega(\xi') \cdot \frac{e^{-\frac{\pi}{\alpha} (\xi - \xi')}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\alpha} (\xi - \xi')}} d\xi' - \frac{\pi}{\alpha} \int_{\xi}^{+\infty} \omega(\xi') \cdot \frac{e^{-\frac{\pi}{\alpha} (\xi' - \xi)}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\alpha} (\xi' - \xi)}} d\xi',$$

$$\frac{dS}{d\xi} = - \frac{\pi}{\alpha} \int_{-\infty}^{\xi} \omega(\xi') d\xi' - \frac{\pi}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\pi}{\alpha} (\xi' - \xi)}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\alpha} (\xi' - \xi)}} \cdot \omega(\xi') d\xi'.$$

On obtient finalement :

$$\frac{d\chi}{d\xi} - \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\pi}{\alpha} (\xi' - \xi)}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\alpha} (\xi' - \xi)}} \cdot e^{\frac{1}{2}\xi'} \cdot \chi(\xi') d\xi' = \Lambda,$$

c'est-à-dire :

$$(5) \quad \chi(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L \left| 1 - e^{-\frac{\pi}{\alpha} (\xi' - \xi)} \right| \cdot e^{\frac{1}{2}\xi'} \cdot \chi(\xi') d\xi' = A\xi + B,$$

où A et B sont deux constantes.

Retournant aux anciennes variables on obtient :

$$(6) \quad \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} L \left| 1 - \left(\frac{x}{x'} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \right| \cdot \varphi(x') dx' = A L x + B.$$

REMARQUE.

On sera amené dans le chapitre VII à étudier un problème analogue avec une condition aux limites :

$$\frac{\partial \chi}{\partial \eta} = \alpha \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}\xi}}{e^{\frac{1}{2}\xi} + 1} \cdot \chi \quad \text{sur} \quad \eta = 0 \quad \text{au lieu de (2).}$$

On obtient pour un tel problème, par un traitement semblable à celui qui vient d'être fait, l'équation intégrale :

$$(7) \quad \chi(\xi) + \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L \left| 1 - e^{\frac{\pi}{a}(\xi' - \xi)} \right| \cdot \frac{e^{\xi'} \cdot \chi(\xi') d\xi'}{e^{\xi'} + 1} = A\xi + B,$$

et faisant le changement de variables :

$$x = aL(e^{\xi} + 1) \quad \text{et} \quad \chi(\xi) = \varphi(x)$$

on trouve :

$$(8) \quad \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} L \left| 1 - \left(\frac{\frac{x}{e^a} - 1}{\frac{x'}{e^a} - 1} \right) \right| \cdot \varphi(x') dx' = AL \left(\frac{x}{e^a} - 1 \right) + B.$$

Comportement des solutions des équations intégrales (5) et (7) quand $\xi \rightarrow -\infty$.

Étudions le cas de l'équation (5) et posons $\omega(\xi) = e^{\xi} \chi(\xi)$.

Que peut-on dire du comportement quand $\xi \rightarrow -\infty$ d'une solution, supposée bornée quand $\xi \rightarrow +\infty$?

X étant un nombre fixe on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} L \left| 1 - e^{\frac{\pi}{a}(\xi' - \xi)} \right| \cdot \omega(\xi') d\xi' &= \int_{-\infty}^X L \left| 1 - e^{\frac{\pi}{a}(\xi' - \xi)} \right| \cdot \omega(\xi') d\xi' \\ &\quad + \int_X^{+\infty} L \left| 1 - e^{\frac{\pi}{a}(\xi' - \xi)} \right| \cdot \omega(\xi') d\xi' \end{aligned}$$

et posant $\xi' = \xi + t$ on a :

$$\int_X^{+\infty} L \left| 1 - e^{\frac{\pi}{a}(\xi' - \xi)} \right| \cdot \omega(\xi') d\xi' = e^{\xi} \int_{X-\xi}^{+\infty} L \left| 1 - e^{\frac{\pi}{a}t} \right| \cdot e^t \cdot \chi(\xi + t) dt;$$

dans l'intervalle $X - \xi < t$, $\chi(\xi + t)$ est borné, d'où l'on déduit que l'intégrale ci-dessus tend vers 0 quand $\xi \rightarrow -\infty$.

D'autre part :

$$\int_{-\infty}^X L \left| 1 - e^{\frac{\pi}{a}(\xi' - \xi)} \right| \cdot \omega(\xi') d\xi' = \int_{-\infty}^{X-\xi} L \left| 1 - e^{\frac{\pi}{a}t} \right| \cdot \omega(\xi + t) dt$$

et posant :

$$\omega(\xi) = e^{\mu\xi} \theta(\xi) = e^{\xi} \chi(\xi), \quad \theta(\xi) = e^{(1-\mu)\xi} \chi(\xi), \quad 0 < \mu < 1,$$

$$\int_X^{+\infty} L \left| 1 - e^{\frac{\pi}{a}(\xi' - \xi)} \right| \cdot \omega(\xi') d\xi' = e^{\mu\xi} \int_{-\infty}^{X-\xi} L \left| 1 - e^{\frac{\pi}{a}t} \right| \cdot e^{\mu t} \cdot \theta(\xi + t) dt.$$

Cette expression tend vers 0 quand $\xi \rightarrow -\infty$ si $\theta(\xi)$ est borné quand $\xi \rightarrow -\infty$.

Ainsi, sous réserve que $e^{(1-\mu)\xi} \cdot \chi(\xi)$, $0 < \mu < 1$ soit borné quand $\xi \rightarrow -\infty$, l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L \left(1 - e^{-\frac{\pi}{\alpha}(\xi' - \xi)} \right) \cdot \omega(\xi') d\xi'$$

tend vers 0 quand $\xi \rightarrow -\infty$.

La même conclusion est valable si :

$$\omega(\xi) = \frac{e^{\xi}}{e^{\xi} + 1} \chi(\xi).$$

Retournant à la variable x on peut dire, dans le cas de l'équation (6) comme dans celui de l'équation (8), que toute solution bornée quand $x \rightarrow +\infty$, qui, au voisinage de $x = 0$ est telle que $x^{(1-\mu)} \varphi(x)$ est borné pour une valeur de μ comprise entre 0 et 1, se comporte comme $ALx + B$ ou $ALx + B - ALa$ quand $x \rightarrow 0$.

II. — ÉTUDE DU CAS TRIDIMENSIONNEL

On recherche maintenant une représentation du potentiel de la forme :

$$\Phi = e^{i(kz + \sigma t)} \cdot \varphi(x, y).$$

Avec des variables sans dimension, $\varphi(x, y)$ est solution du système :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k^2 \varphi = 0;$$

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi, \quad y = 0, \quad x > 0;$$

$$(3) \quad \sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad y + x \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Réitérant la transformation $x + iy = e^{\xi + i\eta}$, $\chi(\xi, \eta) = \varphi(e^{\xi} \cos \eta, e^{\xi} \sin \eta)$, on obtient :

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} - k^2 e^{2\xi} \chi = 0, \quad -\alpha < \eta < 0;$$

$$(5) \quad \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = e^{\xi} \chi, \quad \eta = 0;$$

$$(6) \quad \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = \alpha.$$

REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

On cherche pour les équations (1), (2), (3) une solution $\varphi(x, y)$ ayant au plus une singularité logarithmique à l'origine :

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) \cdot Lr + \varphi_2(x, y), \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

φ_1 et φ_2 étant régulières ainsi que leurs dérivées partielles premières au voisinage de l'origine.

On suppose de plus que φ , $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sont bornés quand x est grand.

D'autre part, on a :

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = e^{\xi} \cos \eta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e^{\xi} \sin \eta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

et si $r^2 = x^2 + y^2$ est petit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_1}{r} \cdot \frac{x}{r} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} Lr + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi_1}{r} \cdot \frac{y}{r} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} Lr + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y},$$

d'où :

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = \varphi_1 + \xi e^{\xi} \left(\cos \eta \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \sin \eta \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) + e^{\xi} \left(\cos \eta \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \sin \eta \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right).$$

Des hypothèses faites on déduit donc :

a) quand $\xi \rightarrow -\infty$:

$$\chi \sim \xi,$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \rightarrow A, \quad \varphi_1(0, 0) = A;$$

b) quand $\xi \rightarrow +\infty$:

$$\chi \quad \text{est borné,}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \sim e^{\xi}.$$

Recherche d'une fonction de Green $G(\xi, \eta; \xi', \eta')$.

Cherchons pour l'équation (4) une solution de la forme $a(\xi) \beta(\eta)$:

$$(a'' - k^2 e^{2\xi} a) \beta + a \beta'' = 0,$$

d'où :

$$\beta'' + \omega^2 \beta = 0,$$

$$a'' - (k^2 e^{2\xi} + \omega^2) a = 0.$$

On peut prendre comme solution $\beta = \cos \omega \eta$, $a = I_{\omega}(ke^{\xi})$ ou $K_{\omega}(ke^{\xi})$, I_{ω} et K_{ω} désignant les fonctions de Bessel d'ordre ω d'argument imaginaire.

Posons :

$$G(\xi, \eta; \xi', \eta') = \sum_{-\infty}^{+\infty} K_n(ke^{\xi}) \cdot I_n(ke^{\xi'}) \cdot \cos n(\eta + \alpha) \cdot \cos n(\eta' + \alpha)$$

qu'on peut écrire aussi :

$$2 G(\xi, \eta; \xi', \eta') = \sum_{-\infty}^{+\infty} K_n(ke^{\xi}) \cdot I_n(ke^{\xi'}) \cdot \cos n(\eta + \eta' + 2\alpha) \\ + \sum_{-\infty}^{+\infty} K_n(ke^{\xi}) \cdot I_n(ke^{\xi'}) \cdot \cos n(\eta - \eta'),$$

et par les formules d'addition des fonctions de Bessel :

$$2 G (\xi, \eta; \xi', \eta') = K_0 (k \lambda) + K_0 (k \mu),$$

avec :

$$\lambda^2 = e^{2\xi} + e^{2\xi'} - 2 e^{\xi+\xi'} \cos (\eta + \eta' + 2 \alpha),$$

$$\mu^2 = e^{2\xi} + e^{2\xi'} - 2 e^{\xi+\xi'} \cos (\eta - \eta').$$

La fonction G ainsi introduite jouit des propriétés suivantes :

1° G est symétrique par rapport aux couples $\xi, \eta; \xi', \eta'$;

$$2^\circ \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta'^2} - k^2 e^{2\xi'} G = 0;$$

$$3^\circ \quad \frac{\partial G}{\partial \eta'} = 0, \quad \eta' = -\alpha;$$

4° posant $(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 = \rho^2$ de :

$$\mu \sim e^{\xi} \rho \quad \text{et} \quad K_0 (\rho) \sim -L\rho \quad \text{si} \quad \rho \rightarrow 0,$$

on déduit :

$$G (\xi, \eta; \xi', \eta') \sim -\frac{1}{2} L \rho;$$

5° on sait que pour z grand :

$$K_0 (z) = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-z} \left(1 - \frac{1}{8z} + \dots \right),$$

$$K'_0 (z) = -K_1 (z) = -\left(\frac{\pi}{2z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-z} \left(1 + \frac{3}{8z} + \dots \right);$$

par suite :

— quand $\xi' \rightarrow +\infty$:

$$G \sim e^{-e^{\xi'}},$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi'} \sim e^{-e^{\xi'}};$$

— quand $\xi' \rightarrow -\infty$:

$$G \rightarrow K_0 (ke^{\xi}),$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi'} \sim e^{\xi}.$$

Calcul de $\chi (\xi, \eta)$.

On calcule l'intégrale double de la fonction :

$$G.(\Delta \chi - k^2 e^{2\xi'} \chi) - \chi.(\Delta G - k^2 e^{2\xi'} G)$$

étendue au domaine ci-dessous (fig. 4) :

Il vient :

$$\iint [G (\Delta \chi - k^2 e^{2\xi'} \chi) - \chi (\Delta G - k^2 e^{2\xi'} G)] d\xi' d\eta'$$

$$= \int \left[\left(G \frac{\partial \chi}{\partial \xi'} - \chi \frac{\partial G}{\partial \xi'} \right) d\eta' - \left(G \frac{\partial \chi}{\partial \eta'} - \chi \frac{\partial G}{\partial \eta'} \right) d\xi' \right],$$

d'où l'on déduit, quand T et T' s'éloignent à l'infini :

$$0 = -\pi \chi(\xi, \eta) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[G(\xi, \eta; \xi', 0) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \eta'}(\xi', 0) - \chi(\xi', 0) \frac{\partial G}{\partial \eta'}(\xi, \eta; \xi', 0) \right] d\xi' = \alpha A K_0(ke^{\xi}),$$

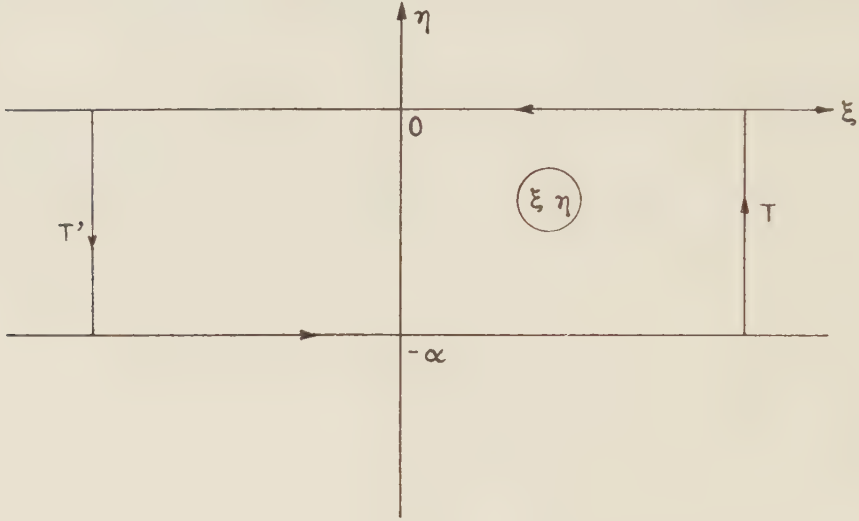


Fig. 4

et tenant compte de la condition aux limites (5) :

$$\chi(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[G(\xi, \eta; \xi', 0) \cdot e^{\xi'} - \frac{\partial G}{\partial \eta'}(\xi, \eta; \xi', 0) \right] \cdot \chi(\xi', 0) d\xi' - \frac{\alpha A}{\pi} K_0(ke^{\xi})$$

ou :

$$(7) \quad \chi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[K_0(k\lambda) + K_0(k\mu) - \frac{ke^{\xi} \sin(\eta + 2\alpha)}{\lambda} K'_0(k\lambda) + \frac{ke^{\xi} \sin \eta}{\mu} K'_0(k\mu) \right] e^{\xi'} \chi(\xi', 0) d\xi' - \frac{\alpha A}{\pi} K_0(ke^{\xi}),$$

avec :

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= e^{2\xi} + e^{2\xi'} - 2e^{\xi+\xi'} \cos(\eta + 2\alpha); \\ \mu^2 &= e^{2\xi} + e^{2\xi'} - 2e^{\xi+\xi'} \cos \eta. \end{aligned}$$

Quand η tend vers 0 par valeurs négatives, l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{\xi+\xi'} \frac{\sin \eta}{\mu} \cdot K'_0(k\mu) \cdot \chi(\xi', 0) d\xi'$$

a pour limite :

$$-\frac{\chi(\xi, 0)}{2} \lim_{\eta \nearrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\xi + \xi')} \frac{\sin \eta}{\mu^2} d\xi'.$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\xi + \xi')} \frac{\sin \eta}{\mu^2} d\xi' = \int_0^{+\infty} \frac{u \sin \eta du'}{u^2 + u'^2 - 2uu' \cos \eta} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \eta dt}{t^2 - 2t \cos \eta + 1} \rightarrow -\pi$$

après avoir posé successivement :

$$e^{i\xi'} = u', \quad e^{i\xi} = u, \quad u' = t.u.$$

La limite cherchée est donc $\frac{\chi(\xi, 0)}{2}$ et l'équation (7) devient, quand $\eta \nearrow 0$:

$$\chi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[K_0(k\lambda) + K_0(k\mu) - \frac{ke^{i\xi} \sin 2\alpha}{\lambda} K'_0(k\lambda) \right] e^{i\xi'} \chi(\xi') d\xi' - \frac{2\alpha A}{\pi} K_0(ke^{i\xi}),$$

avec :

$$\begin{aligned} \chi(\xi) &= \chi(\xi, 0), \\ \lambda^2 &= e^{2i\xi} + e^{2i\xi'} - 2e^{i(\xi + \xi')} \cos 2\alpha, \\ \mu &= |e^{i\xi} - e^{i\xi'}|. \end{aligned}$$

Retournant à la variable x on obtient l'équation intégrale :

$$(8) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[K_0(k\sqrt{x'^2 + x^2 - 2x'x \cos 2\alpha}) + K_0(k|x' - x|) - \frac{kx \sin 2\alpha K'_0(k\sqrt{x'^2 + x^2 - 2x'x \cos 2\alpha})}{\sqrt{x'^2 + x^2 - 2x'x \cos 2\alpha}} \right] \varphi(x') dx' - \frac{2\alpha A}{\pi} K_0(kx)$$

qui définit le potentiel à la surface libre.

Cas particuliers.

$$\alpha = \frac{\pi}{2} :$$

$$(9) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [K_0(k|x + x'|) + K_0(k|x - x'|)] \cdot \varphi(x') dx' - AK_0(kx);$$

$$\alpha = \pi :$$

$$(10) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} K_0(k|x' - x|) \cdot \varphi(x') dx' - A \cdot K_0(kx).$$

INTÉGRATION DANS LE CAS $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

On peut remplacer l'équation (9) par la suivante :

$$(11) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(k|x' - x|) \cdot \varphi(x') dx' - AK_0(kx),$$

à condition de ne garder que les solutions paires.

Les solutions de l'équation (11) rendue homogène sont de la forme $e^{i\beta x}$, avec :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(k|x' - x|) \cdot e^{i\beta x'} dx' = e^{i\beta x} \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 + \beta^2}},$$

d'où :

$$\beta^2 = 1 - k^2.$$

Ainsi, pour $A = 0$, on obtient la solution :

$$\varphi(x) = B \cos(\sqrt{1 - k^2} \cdot x) \quad |k| < 1.$$

Pour intégrer l'équation complète, introduisons la transformée de Fourier de $\varphi(x)$:

$$\bar{\varphi}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} \cdot \varphi(x) dx.$$

Notant que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwt} \cdot K_0(kt) dt = \frac{\pi}{\sqrt{w^2 + k^2}},$$

on obtient :

$$\bar{\varphi}(w) = \frac{A\pi}{1 - \sqrt{w^2 + k^2}},$$

qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{1 - \sqrt{w^2 + k^2}} = \frac{2}{1 - k^2 - w^2} - \frac{1}{\sqrt{w^2 + k^2}} + \frac{1}{\sqrt{w^2 + k^2} (1 + \sqrt{w^2 + k^2})}.$$

Or :

$$\begin{array}{ll} \frac{2}{1 - k^2 - w^2} & \text{est la transformée de Fourier de } \frac{\sin(\sqrt{1 - k^2} \cdot |x|)}{\sqrt{1 - k^2}}, \\ \frac{1}{\sqrt{w^2 + k^2}} & \text{est la transformée } \frac{1}{\pi} \cdot K_0(kx). \end{array}$$

En outre, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{w^2 + k^2}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{w^2 + k^2}} = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \left(\frac{1}{\sqrt{w^2 + k^2}} e^{-t\sqrt{w^2 + k^2}} \right)$$

et :

$$\frac{1}{\sqrt{w^2 + k^2}} e^{-t\sqrt{w^2 + k^2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sqrt{k^2 + w^2}}{t} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot K_{\frac{1}{2}}(t\sqrt{w^2 + k^2})$$

ou, d'après les formules de Sonine :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{w^2 + k^2}} e^{-t\sqrt{w^2 + k^2}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} (wx)^{\frac{1}{2}} \cdot J_{-\frac{1}{2}}(wx) K_0(k\sqrt{t^2 + x^2}) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(wx) \cdot K_0(k\sqrt{t^2 + x^2}) dx. \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} dx \int_0^{+\infty} e^{-t} K_0(k\sqrt{t^2 + x^2}) dt = \frac{\pi}{\sqrt{w^2 + k^2}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{w^2 + k^2}},$$

d'où les solutions :

$$\varphi(x) = A \left[\frac{\pi}{\sqrt{1 - k^2}} \sin(\sqrt{1 - k^2} \cdot |x|) - K_0(kx) + \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot K_0(k\sqrt{t^2 + x^2}) dt \right].$$

On vérifie immédiatement que :

$$\varphi(x) \sim ALx \quad \text{si} \quad x \rightarrow 0.$$

En outre, $\varphi(x)$ se comporte comme $\frac{A\pi}{\sqrt{1 - k^2}} \sin(\sqrt{1 - k^2} x)$ quand x tend vers l'infini.

CAS $\alpha = \pi$.

L'équation peut être intégrée par la méthode de Wiener-Hopf.

CHAPITRE III

ONDES LIQUIDES DE GRAVITÉ SUR UNE PLAGE DANS LE CAS BIDIMENSIONNEL MÉTHODE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

On sait déjà que le problème consiste à trouver une fonction harmonique $\varphi(x, y)$ définie dans le secteur xOt et vérifiant les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \varphi & \text{sur} & \quad Ox, \\ \sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 & \text{sur} & \quad Ot. \end{aligned}$$

Désignant par $f(z)$ la fonction analytique dont $\varphi(x, y)$ est la partie réelle on peut écrire les conditions aux limites sous la forme :

$$(1) \quad \operatorname{Im} \left(\frac{df}{dz} + if \right) = 0 \quad \text{sur} \quad Ox;$$

$$(2) \quad \operatorname{Im} \left(e^{-i\alpha} \frac{df}{dz} \right) = 0 \quad \text{sur} \quad Ot,$$

et grâce à cette dernière condition on peut réaliser facilement le prolongement analytique de $e^{-i\alpha} \frac{df}{dz}$ dans le domaine symétrique du secteur xOt par rapport à Ot (fig. 5).

Calculons l'intégrale $\int_{\mathcal{L}} U(z, \zeta) dz$ où $U(z, \zeta) = \frac{f'(z)}{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} - 1}$. On suppose $\frac{\pi}{\alpha} = n$ entier,

ζ réel et $\mathcal{L}$ désigne le contour $A \gamma_1 B \gamma_2 C \gamma_2 D \gamma_1$.

Par la condition aux limites (2) on peut écrire :

$$e^{-i\alpha} f'(z) = e^{i\alpha} \overline{f'(x)},$$

avec :

$$\begin{aligned} z &= e^{-2i\alpha} x, & x &\text{ réel,} \\ dz &= e^{-2i\alpha} dx, \end{aligned}$$

d'où :

$$f'(z) dz = \overline{f'(x) dx}$$

(le symbole $\bar{\omega}$ désignant le nombre complexe conjugué de ω), et l'on en déduit :

$$\int_{CD} U dz = - \int_{AB} U dz.$$

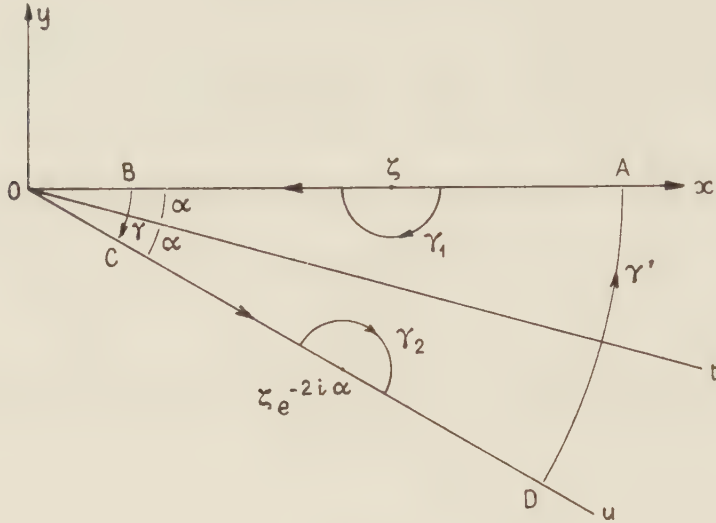


Fig. 5

Appliquant le théorème de Cauchy on obtient :

$$\int_{\gamma} U dz + \int_{\gamma'} U dz + 2i \int_{BA} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\left(\frac{x}{z}\right)^n - 1} dx = \pi i \frac{z}{n} [f'(z) + e^{-2i\alpha} f'(z e^{-2i\alpha})].$$

$\int_{\gamma'} U dz$ tend vers 0 quand le rayon du cercle γ' devient infini et si l'on admet que $\int_0^x \varphi(x, 0) dx$ existe,

$\int_{\gamma} U dz$ a une limite A indépendante de z quand le rayon du cercle γ tend vers 0.

Enfin, tenant compte de la condition aux limites $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_1$ on obtient :

$$z \varphi'(z) - \frac{n}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) dx}{\left(\frac{x}{z}\right)^n - 1} = A,$$

avec :

$$\varphi(x) = \varphi(x, 0).$$

Intégrant par rapport à ζ on trouve, après avoir changé légèrement les notations (x' pour x et x pour ζ) :

$$\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} L \left| 1 - \left(\frac{x}{x'} \right)^n \right| \cdot \varphi(x') dx' = ALx + B.$$

C'est l'équation intégrale qui régit le potentiel à la surface libre et qui a été déjà établie au chapitre II.

Méthode de l'équation différentielle $\frac{\pi}{\alpha} = 2q, q$ entier.

1. — On sait qu'on peut prolonger $f(z)$ dans le domaine tOu et si $z = xe^{-2i\alpha}$, x réel, on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= \overline{f(x)}, \\ f'(z) &= e^{2i\alpha} \overline{f'(x)}, \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(K)}(z) &= e^{2K i \alpha} \overline{f^{(K)}(x)}, \end{aligned}$$

2. — Nous allons calculer l'intégrale :

$$\int_{\gamma} \frac{z^{q-1} \mathfrak{F}(f)}{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{2q} - 1} dz$$

le long du contour ABCD, $\mathfrak{F}(f)$ étant une fonctionnelle de f choisie de façon que les intégrales prises sur AB et CD se compensent (*fig. 6*).

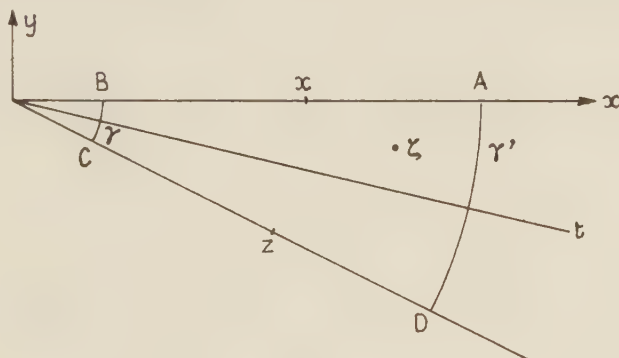


Fig. 6

3. — Sur Ox , $\frac{df}{dz} + if$ est réel. Il en est de même de :

$$\left(\frac{d}{dz} - \lambda \right) \left(\frac{d}{dz} - \bar{\lambda} \right) \left(\frac{df}{dz} + if \right)$$

et plus généralement de :

$$f^{(m)}(z) + a_1 f^{(m-1)}(z) + \dots + a_m$$

si le polynôme :

$$P_m = u^m + a_1 u^{m-1} + \dots + a_m$$

est le produit par $u + i$ d'un polynôme à coefficients réels.

4. — Prenons :

$$\mathfrak{F}(f) = f^{(q)}(z) + a_1 f^{(q-1)}(z) + \dots + a_q,$$

le polynôme $P_q(u) = u^q + a_1 u^{q-1} + \dots + a_q$ jouissant de la propriété énoncée au paragraphe 3.

On a :

— en x :

$$\mathfrak{F}(f) = f^{(q)}(x) + a_1 f^{(q-1)}(x) + \dots + a_q;$$

— en $z = xe^{-2i\alpha}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f) &= f^{(q)}(z) + a_1 f^{(q-1)}(z) + \dots + a_q \\ &= e^{2qi\alpha} [f^{(q)}(x) + a_1 e^{-2i\alpha} \overline{f^{(q-1)}(x)} + a_2 e^{-4i\alpha} \overline{f^{(q-2)}(x)} + \dots]. \end{aligned}$$

Si l'on choisit les a_j de telle sorte que :

$$\overline{a_1} = a_1 e^{-2i\alpha}, \quad \overline{a_2} = a_2 e^{-4i\alpha}, \dots, \quad \text{etc.,}$$

les valeurs prises par $\mathfrak{F}(f)$ en x et $z = xe^{-2i\alpha}$ sont opposées, ce qui assure la compensation des intégrales prises sur AB et CD.

5. — Admettant que $f, f', \dots, f^{(q)}$ sont bornées à l'infini et faisant tendre le rayon de γ' vers l'infini, le rayon de γ vers 0, on obtient par application du théorème de Cauchy, en supposant que $f(z)$ présente à l'origine une singularité logarithmique :

$$f(z) \sim ALz \quad \text{si} \quad z \rightarrow 0,$$

$$(3) \quad \mathfrak{F}(f) = (-1)^q (q-1)! \frac{A}{\gamma^q}.$$

6. — Reste à montrer comment on détermine le polynôme $P_q(u)$.

Rappelons ses propriétés :

- 1° — i est un zéro;
- 2° les autres zéros sont deux à deux conjugués;
- 3° si λ est un zéro, $\overline{\lambda} e^{2i\alpha}$ est aussi un zéro.

Ces conditions déterminent uniquement l'ensemble des zéros.

Sous la forme :

$$\beta_K = e^{i\pi\left(\frac{K}{q} + \frac{1}{2}\right)}, \quad K = 1, 2, \dots, q.$$

H. LEWY et J. J. STOKER ont formé par d'autres méthodes l'équation différentielle (3) que doivent nécessairement vérifier les potentiels $f(z)$, et en ont déduit les solutions satisfaisant aux conditions aux limites (1) et (2).

CHAPITRE IV

ONDES LIQUIDES DE GRAVITÉ SUR UNE PLAGE INCLINÉE DE 45° SOUS L'HORIZONTALE DANS LE CAS TRIDIMENSIONNEL

Nous cherchons une fonction $\varphi(x, y)$ solution du système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k^2 \varphi &= 0 && \text{dans le secteur } xOy, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi &= 0 && \text{sur } Ox, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 && \text{sur } Oy. \end{aligned}$$

Il revient au même de chercher les fonctions $\varphi(x, y)$ définies dans le quadrant $y'Ox$, prenant même valeur en deux points quelconques symétriques par rapport à Oy (fig. 7) et satisfaisant aux équations :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k^2 \varphi = 0 && \text{dans } y'Ox; \\ (2) \quad & \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi = 0 && \text{sur } Ox; \\ (3) \quad & \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi = 0 && \text{sur } Oy'. \end{aligned}$$

Posant :

$$u = \left(\frac{\partial}{\partial y} - 1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) \varphi,$$

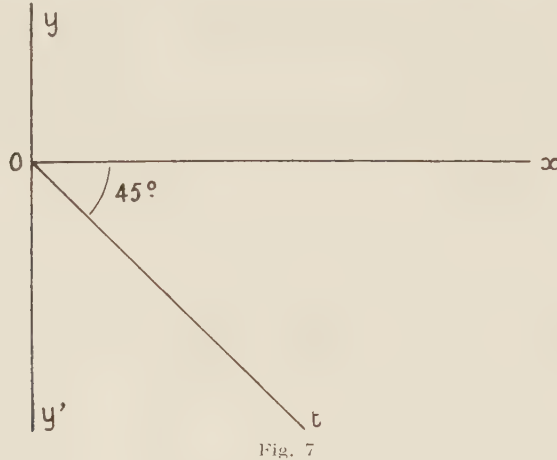
la fonction u doit satisfaire à :

$$\begin{aligned} \Delta u - k^2 u &= 0 && \text{dans } y'Ox \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \\ u &= 0 && \text{sur } Ox, \\ u &= 0 && \text{sur } Oy'. \end{aligned}$$

Si l'on cherche pour $\varphi(x, y)$ une solution ayant au plus une singularité logarithmique à l'origine, on est conduit à prendre pour u une solution présentant à l'origine une singularité en $\frac{1}{r^2} (r^2 = x^2 + y^2)$, c'est-à-dire :

$$u = K_2(kr) \sin 2\theta, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \text{Arc tg } \frac{y}{x},$$

où K_2 désigne comme d'habitude la fonction de Bessel d'argument imaginaire, d'ordre 2.



Il reste à construire les solutions de :

$$(4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} - 1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) \varphi = K_2(kr) \sin 2\theta$$

qui satisfont aux conditions (2) et (3) et qui prennent même valeur en deux points symétriques par rapport à Ot .

En vue de faciliter l'intégration de (4) il est commode de transformer $K_2(kr) \sin 2\theta$.

Remarquons à cet effet que si $f(s)$ est une fonction dérivable, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(kr) = \frac{k^2 \sin 2\theta}{2} \left(f'' - \frac{f'}{kr} \right),$$

avec :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Notant que :

$$K_2(z) = K''_0(z) - \frac{1}{z} K'_0(z),$$

on a :

$$\frac{\partial^2 K_0(kr)}{\partial x \partial y} = \frac{k^2}{2} \sin 2\theta \cdot K_2(kr)$$

et l'on peut écrire l'équation (4) sous la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - 1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) \varphi = -A \frac{\partial^2 K_0(kr)}{\partial x \partial y}.$$

1. — Posons :

$$v = \left(\frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) \varphi,$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - 1 \right) v = -A \frac{\partial^2 K_0(kr)}{\partial x \partial y},$$

et en intégrant :

$$v = e^y g(x) + A e^y \int_y^{+\infty} e^{-t} \frac{\partial^2 K_0}{\partial x \partial t} dt$$

ou :

$$v = e^y g(x) - A \frac{\partial K_0}{\partial x} + A e^y \int_y^{+\infty} e^{-t} \frac{\partial K_0}{\partial x} dt.$$

Nous devons écrire :

$$\Delta v - k^2 v = 0,$$

$$v = 0 \quad \text{sur } Oy'.$$

REMARQUE.

Si $f(x, y)$ est solution de $\Delta f - k^2 f = 0$:

$$g(x, y) = e^y \int_y^{+\infty} e^{-t} f(x, t) dt \quad \text{et} \quad h(x, y) = e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{\tau} f(\tau, y) d\tau$$

sont aussi des solutions.

Vérifions-le pour $g(x, y)$, par exemple :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = e^y \int_y^{+\infty} e^{-t} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = g - f,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = g - f - \frac{\partial f}{\partial y},$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta g - k^2 g &= e^y \int_y^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (1 - k^2) f \right) dt - f - \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= e^y \int_y^{+\infty} e^{-t} \left(f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) dt - f - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Par suite, pour satisfaire à la condition $\Delta v - k^2 v = 0$, on doit prendre :

$$g''(x) + (1 - k^2) g(x) = 0.$$

De plus, quand $x \rightarrow 0, y < 0$:

$$\frac{\partial K_0}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \int_y^{+\infty} e^{-t} \frac{\partial K_0}{\partial x} dt \rightarrow -\pi,$$

et pour avoir $v = 0$ sur Oy' on doit prendre $g(0) = \pi A$.

On trouve donc :

$$v = B e^y \sin (\sqrt{1-k^2} . x) - A \frac{\partial K_0}{\partial x} + A e^y \int_y^{+\infty} e^{-t} \frac{\partial K_0}{\partial x} dt + \pi A e^y \cos (\sqrt{1-k^2} . x),$$

où B est une constante arbitraire (on suppose $|k| < 1$).

2. — Intégrons maintenant l'équation :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) \varphi &= v, \\ \varphi &= e^{-x} h(y) + B e^{y-x} \int_{-\infty}^x e^{\tau} \sin (\sqrt{1-k^2} \tau) d\tau \\ &+ A \left\{ -K_0 + e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{\tau} K_0 d\tau + e^{y-x} \int_y^{+\infty} e^{-t} dt \int_{-\infty}^x e^{\tau} \frac{\partial K_0}{\partial \tau} d\tau \right. \\ &\quad \left. + \pi e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{\tau+y} \cos (\sqrt{1-k^2} \tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

On détermine $h(y)$ en écrivant $\Delta \varphi - k^2 \varphi = 0$ et en tenant compte de la condition de symétrie pour φ .

Cela donne finalement :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

avec :

$$\varphi_2 = B [e^{-x} (k_1 \cos k_1 y + \sin k_1 y) + e^y (k_1 \cos k_1 x - \sin k_1 x)],$$

$$\varphi_1 = A \frac{\pi}{k^2} [e^y (\cos k_1 x - k_1 \sin k_1 x) + e^{-x} (\cos k_1 y + k_1 \sin k_1 y)]$$

$$\begin{aligned} &+ A \left[-K_0 (k \sqrt{x^2 + y^2}) + e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{\tau} K_0 (k \sqrt{\tau^2 + y^2}) d\tau + e^y \int_y^{+\infty} e^{-t} K_0 (k \sqrt{x^2 + t^2}) dt \right. \\ &\quad \left. - e^y \int_y^{+\infty} e^{-t} dt \left(e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{\tau} K_0 (k \sqrt{\tau^2 + t^2}) d\tau \right) \right], \end{aligned}$$

avec :

$$k_1 = \sqrt{1-k^2}.$$

CHAPITRE V

ONDES LIQUIDES DE GRAVITÉ SUR UNE PLAGE DANS LE CAS BIDIMENSIONNEL ⁽¹⁾

I. — POSITION DU PROBLÈME — FORME DE LA SOLUTION

Nous reprenons dans ce chapitre le problème de la plage dans le cas bidimensionnel.

Comme toujours Oy est la verticale ascendante, Oxz représente la surface libre moyenne, et $y + x \operatorname{tg} \alpha = 0$, $x > 0$ est l'équation du fond ($\alpha < \frac{\pi}{2}$).

Les équations du problème sont alors les suivantes :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans le secteur} \quad xOt,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{sur} \quad Ox,$$

$$\sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{sur} \quad Ot.$$

Nous savons qu'on peut considérer $\varphi(x, y)$ comme la partie réelle d'une fonction holomorphe $f(z)$ définie dans le secteur xOt (fig. 8) et satisfaisant aux conditions :

$$(1) \quad \operatorname{Im} \left(\frac{df}{dz} + if \right) = 0 \quad \text{sur} \quad Ox;$$

$$(2) \quad \operatorname{Im} \left(e^{-i\alpha} \frac{df}{dz} \right) = 0 \quad \text{sur} \quad Ot.$$

(1) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 232, pp. 211-213 (15 janvier 1951).

Nous allons chercher pour $f(z)$ une solution de la forme :

$$f(z) = \lambda \int_C e^{zx} \frac{g(\zeta)}{\zeta + i} d\zeta,$$

où $g(\zeta)$ est une fonction analytique de la variable ζ , C un contour dans le plan de cette même variable et λ une constante.

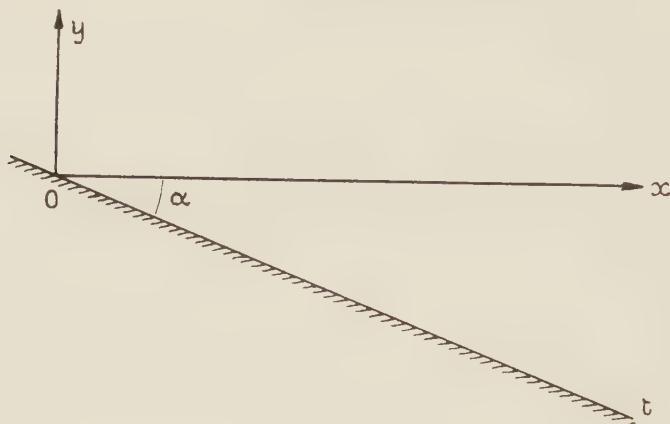


Fig. 8

Il est commode, afin de simplifier l'exposition, de préciser d'abord la forme de C :

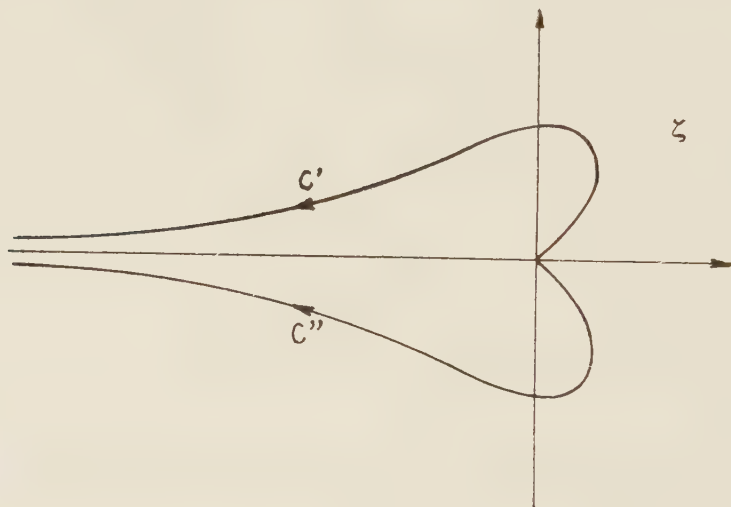


Fig. 9

C se compose de deux morceaux, C' et C'' (fig. 9) :

C' est un arc qui part de l'origine dans le premier quadrant, puis passe dans le quatrième quadrant, et est asymptote à la partie négative de l'axe réel;

C'' est le symétrique de C' par rapport à l'axe réel, et l'on prend pour C , soit $C_1 = C' + C''$, soit $C_2 = C' - C''$.

II. — INTERPRÉTATION DES CONDITIONS AUX LIMITES

Remarquant que :

$$\frac{df}{dz} + if = \lambda \int_C e^{\lambda z} g(\zeta) d\zeta,$$

on voit que la première condition aux limites est vérifiée si :

$$\overline{g(\zeta)} = g(\bar{\zeta})$$

et si l'on prend $\lambda = 1$ sur C_1 , et $\lambda = i$ sur C_2 .

D'autre part, on peut écrire :

$$e^{-i\alpha} \frac{df}{dz} = \lambda e^{-i\alpha} \int_C e^{\lambda z} \frac{\zeta g(\zeta)}{\zeta + i} d\zeta$$

et pour $z = re^{-i\alpha}$, r réel (point sur le fond), on obtient, après le changement de variables $\zeta e^{-i\alpha} = u$:

$$e^{-i\alpha} \frac{df}{dz} = \lambda \int_{\Gamma} e^{ur} \frac{u \cdot g(ue^{i\alpha})}{u + ie^{-i\alpha}} du,$$

Γ étant déduit de C par la rotation $0, -\alpha$.

Mais on peut remplacer Γ par C pourvu que C ait été choisi de façon à ne pas rencontrer de singularité de la fonction $\frac{g(ue^{i\alpha})}{u + ie^{-i\alpha}}$ au cours de la rotation qui l'amène sur Γ .

Dès lors, remplaçant Γ par C , et revenant à la lettre ζ , on voit que la deuxième condition aux limites sera vérifiée si :

$$\frac{g(\bar{\zeta} e^{i\alpha})}{\bar{\zeta} + ie^{-i\alpha}} = \overline{\left[\frac{g(\zeta e^{i\alpha})}{\zeta + ie^{-i\alpha}} \right]}.$$

On est ainsi conduit à rechercher les fonctions analytiques qui satisfont aux conditions :

$$\overline{g(\zeta)} = g(\bar{\zeta}) \quad \frac{g(\bar{\zeta} e^{i\alpha})}{\bar{\zeta} + ie^{-i\alpha}} = \overline{\left[\frac{g(\zeta e^{i\alpha})}{\zeta + ie^{-i\alpha}} \right]}$$

ou, ce qui est la même chose :

$$(1) \quad g(\bar{\zeta}) = \overline{g(\zeta)};$$

$$(2) \quad \frac{g(\zeta e^{2i\alpha})}{g(\zeta)} = \frac{\zeta + ie^{-2i\alpha}}{\zeta - i}.$$

III. — CALCUL DE $g(\zeta)$

Supposant que $g(\zeta)$ n'a pas de zéro dans le demi-plan $\operatorname{Re} \zeta > 0$, on peut écrire

$$(1) \quad Lg(\zeta e^{2i\alpha}) = Lg(\zeta) + L \frac{\zeta + ie^{2i\alpha}}{\zeta - i}$$

(le symbole Lx désignant le logarithme népérien de x).

La fonction harmonique $L|g(\zeta)|$ définie dans $\operatorname{Re} \zeta > 0$ prend au point $\zeta = i\rho e^{-2i\alpha}$, ($\rho > 0$) la valeur :

$$(2) \quad L|g(i\rho e^{-2i\alpha})| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho \sin 2\alpha}{s^2 - 2s\rho \cos 2\alpha + \rho^2} L|g(is)| ds.$$

Mais tenant compte de (1), II et (1), III, on a :

$$\begin{aligned} L|g(is)| &= L|g(-is)|, \\ L|g(i\rho)| &= L|g(i\rho e^{-2i\alpha})| + L \left| \frac{\rho + 1}{\rho - e^{2i\alpha}} \right|. \end{aligned}$$

L'équation (2) devient :

$$\begin{aligned} L|g(i\rho)| &= L \frac{\rho + 1}{\rho - e^{2i\alpha}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{\rho \sin 2\alpha}{s^2 - 2s\rho \cos 2\alpha + \rho^2} + \frac{\rho \sin 2\alpha}{s^2 + 2s\rho \cos 2\alpha + \rho^2} \right\} L|g(is)| ds \end{aligned}$$

et posant :

$$\begin{aligned} L|g(is)| &= h(s), & s &= e^u, & h(e^u) &= H(u), \\ L|g(i\rho)| &= h(\rho), & \rho &= e^\nu, & h(e^\nu) &= H(\nu), \end{aligned}$$

on obtient l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} (3) \quad H(\nu) &= L \frac{e^\nu + 1}{[e^{2\nu} - 2 \cos 2\alpha \cdot e^\nu + 1]^2} \\ &= \frac{\sin 2\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{e^{\nu-u}}{e^{2(\nu-u)} - 2 \cos 2\alpha \cdot e^{\nu-u} + 1} + \frac{e^{\nu-u}}{e^{2(\nu-u)} + 2 \cos 2\alpha \cdot e^{\nu-u} + 1} \right\} H(u) du. \end{aligned}$$

Intégration de l'équation (3).

On peut résoudre l'équation (3) au moyen de la transformation de Fourier.

On pose :

$$\overline{H}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} \cdot H(x) dx,$$

$$I = \frac{\sin 2\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} \left\{ \frac{e^x}{e^{2x} - 2 \cos 2\alpha \cdot e^x + 1} + \frac{e^x}{e^{2x} + 2 \cos 2\alpha \cdot e^x + 1} \right\} dx,$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} \cdot L(e^x + 1) dx,$$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} \cdot L(e^{2x} - 2 \cos 2\alpha \cdot e^x + 1) dx,$$

d'où l'on déduit :

$$\overline{H}(w) = \frac{J - \frac{K}{2}}{1 - I}.$$

Calcul des intégrales I, J, K.

1. — CALCUL DE I (fig. 10).

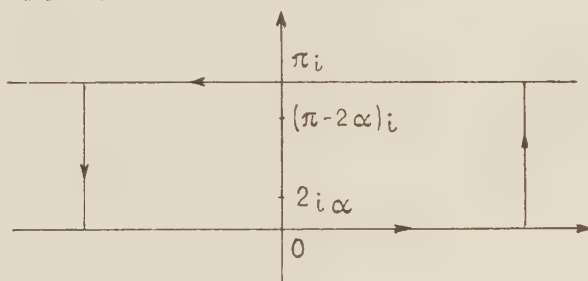


Fig. 10

Par la théorie des résidus on obtient :

$$I = \frac{e^{-2\alpha w} + e^{(2\alpha - \pi)w}}{1 + e^{-\pi w}}.$$

2. — CALCUL DE J (fig. 11).

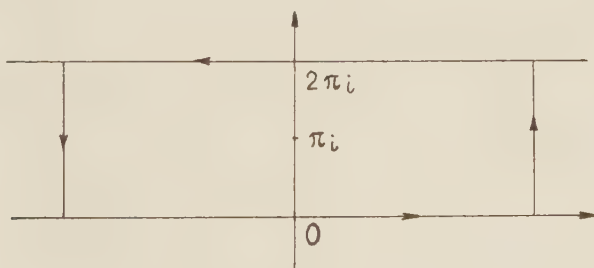


Fig. 11

On écrit :

$$J = -\frac{1}{iw} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} \cdot \frac{e^x dx}{e^x + 1}$$

et par la théorie des résidus on trouve :

$$J = \frac{2\pi}{w} \cdot \frac{e^{-\pi w}}{e^{-2\pi w} - 1}.$$

On peut calculer de la même manière l'intégrale :

$$J^* = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} L |1 - e^{-mx}| dx \quad m > 0,$$

ce qui sera utile plus tard.

On trouve :

$$J^* = \frac{\pi}{w} \cdot \frac{e^{-\frac{2\pi}{m}w} + 1}{e^{\frac{2\pi}{m}w} - 1}.$$

3. — CALCUL DE K (fig. 12).

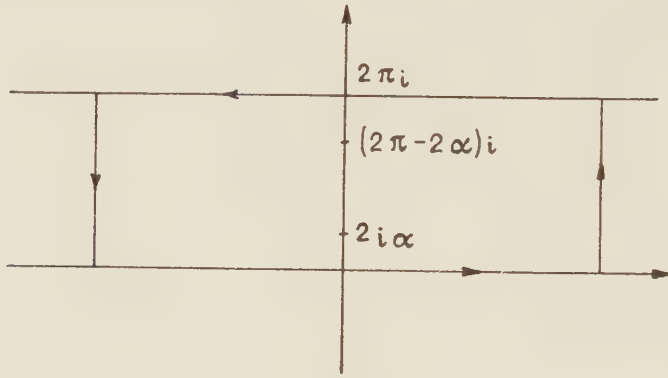


Fig. 12

Écrivant :

$$K = -\frac{2}{iw} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} \cdot \frac{e^{2x} - e^x \cos 2\alpha}{e^{2x} - 2 \cos 2\alpha \cdot e^x + 1} dx,$$

on obtient :

$$K = \frac{2\pi}{w} \cdot \frac{e^{-2\alpha w} + e^{(2\alpha - 2\pi)w}}{e^{-2\pi w} - 1}.$$

On déduit de là :

$$\bar{H}(w) \left(1 - \frac{e^{-2\alpha w} + e^{(2\alpha - \pi)w}}{1 + e^{-\pi w}} \right) = \frac{2\pi}{w} \frac{e^{-\pi w}}{e^{-2\pi w} - 1} - \frac{\pi}{w} \cdot \frac{e^{-2\alpha w} + e^{-(2\pi - 2\alpha)w}}{e^{-2\pi w} - 1}$$

d'où, après quelques transformations :

$$\bar{H}(w) = \frac{\pi}{2w} \left[\frac{e^{-\pi w} + 1}{e^{-\pi w} - 1} - \frac{e^{-2\alpha w} + 1}{e^{-2\alpha w} - 1} \right]$$

et grâce au calcul de J^* , on en conclut :

$$h(\rho) = L \left\{ \frac{\frac{\pi}{\rho^2}}{\frac{\pi}{\rho^2} - 1} \cdot \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Expression de $g(\zeta)$.

Désignons par $g_+(\zeta)$, ou $g_-(\zeta)$, la fonction :

$$\exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \cdot \int_{i\infty}^{-i\infty} \frac{h(|z|)}{z - \zeta} dz \right\}$$

selon que $\operatorname{Re} \zeta$ est > 0 , ou < 0 , et étudions ce que deviennent $g_+(\zeta)$ et $g_-(\zeta)$ quand ζ devient imaginaire pur.

On a :

$$\frac{1}{\pi i} \int_{i\infty}^{-i\infty} \frac{h(|z|)}{z - \zeta} dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{\xi^2 + (\eta - \rho)^2} h(\rho) d\rho - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\eta - \rho) h(\rho)}{\xi^2 + (\eta - \rho)^2} d\rho,$$

avec :

$$\zeta = \xi + i\eta.$$

Par suite, quand :

$$\xi \rightarrow 0 \quad \eta > 0 :$$

$$g_+(\zeta) \rightarrow \exp \left\{ h(\eta) - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(\rho)}{\eta - \rho} d\rho \right\};$$

$$\xi \rightarrow 0 \quad \eta < 0 :$$

$$g_-(\zeta) \rightarrow \exp \left\{ -h(\eta) - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(\rho)}{\eta - \rho} d\rho \right\}.$$

La fonction $g_+(\zeta)$ définie pour $\operatorname{Re} \zeta > 0$ satisfait visiblement à la condition :

$$g_+(\zeta) = \overline{g_+(\bar{\zeta})}.$$

Si, de plus, on tient compte de la façon dont on a obtenu $g_+(\zeta)$ on voit que la fonction :

$$\frac{g_-(\zeta e^{-2i\alpha})}{g_+(\zeta)} \cdot \frac{\zeta - i}{\zeta + i e^{-2i\alpha}}$$

qui est holomorphe et sans zéro dans le secteur $-\frac{\pi}{2} \leq \arg \zeta \leq \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ (fig. 13) a son module égal à 1 sur les frontières :

$$\arg \zeta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \arg \zeta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha.$$

Comme cette fonction tend vers 1 quand ζ devient infini, elle est égale à 1 dans le secteur et ailleurs, par prolongement analytique.

Ainsi, la fonction cherchée $g(\zeta)$ est égale à $g_+(\zeta)$ dans le demi-plan $\operatorname{Re} \zeta > 0$. C'est une fonction analytique sans zéro et sans pôle.

On définit $g(\zeta)$ dans le demi-plan $\operatorname{Re} \zeta < 0$ en réalisant le prolongement analytique de $g_+(\zeta)$ au travers de l'axe imaginaire pur.

On y parvient en considérant la fonction :

$$g_{-}^{\star}(\zeta) = g_{-}(\zeta) \cdot \frac{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1} \cdot \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2},$$

où l'on suppose avoir pris, pour détermination de $(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}$, celles qui, pour $\zeta = \pm i\eta$, sont réelles.

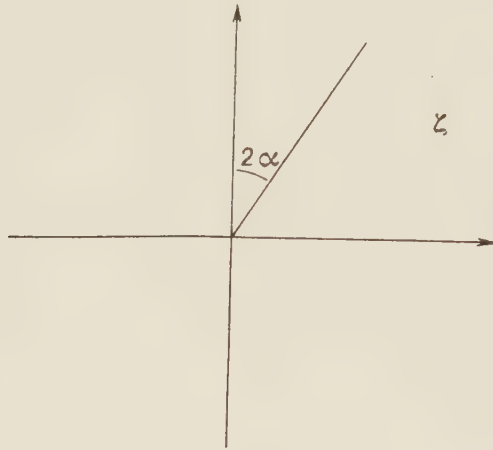


Fig. 13

Car dans ces conditions, quand $\zeta \rightarrow i\eta$, $\xi < 0$:

$$\begin{aligned} g_{-}^{\star}(\zeta) &\rightarrow \frac{(-\eta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{(-\eta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1} \cdot \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2} \exp \left\{ -h(\eta) - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(\rho)}{\eta - \rho} d\rho \right\} \\ &= \exp \left\{ h(\eta) - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(\rho)}{\eta - \rho} d\rho \right\}, \end{aligned}$$

de sorte que $g_{-}^{\star}(\zeta)$ est bien le prolongement de $g_+(\zeta)$.

Ainsi, la fonction $g(\zeta)$ est égale à $g_{-}^{\star}(\zeta)$ quand $\operatorname{Re} \zeta < 0$.

Cette fonction présentera en général une coupure le long de la partie négative de l'axe réel, car les deux déterminations de $(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}$ réelles pour $\zeta = \pm i\eta$ ne coïncident pour ζ réel négatif que si $\alpha = \frac{\pi}{2q}$, q entier.

Singularités de $g(\zeta)$. — Étude de $g(\zeta)$ pour (ζ) infini.

On sait déjà que, dans le demi-plan $\operatorname{Re} \zeta > 0$, $g(\zeta)$ n'a ni zéro, ni pôle.

Les singularités de $g(\zeta)$ situées dans $\operatorname{Re} \zeta < 0$ correspondent à :

$$(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1 = 0 \quad \text{sauf} \quad \zeta = \pm i,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \zeta &= ie^{2ki\alpha}, \\ \zeta &= -ie^{-2ki\alpha}, \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots$$

En général la fonction $g(\zeta)$ est multiforme; elle est définie sur une surface de Riemann à une infinité de feuillets, la coupure étant réalisée sur la partie négative de l'axe réel.

Nous notons aussi que l'origine est un point critique :

$$g(\zeta) \sim \zeta^{\frac{\pi}{2\alpha}-1}.$$

D'autre part, $g(\zeta)$ tend vers 1 quand ζ devient infiniment grand.

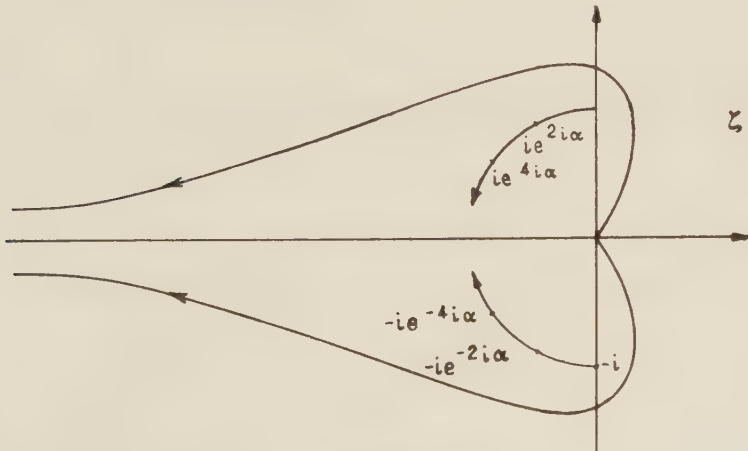


Fig. 14

Enfin, il faut remarquer que les branches C' et C'' , qui forment les morceaux du contour C , doivent être dessinées de manière à enserrer le demi-cercle de centre O et de rayon 1 contenu dans le demi-plan $\operatorname{Re} \zeta < 0$ (fig. 14).

Expressions particulières de $g(\zeta)$.

1. — $\alpha = \frac{\pi}{2q}$, q entier.

On peut voir directement que la fonction :

$$g_1(\zeta) = \frac{\zeta^{q-1}}{\prod_{k=1}^{q-1} \left(\zeta - ie^{i\frac{\pi k}{q}} \right)}$$

satisfait aux équations fonctionnelles (1), II et (2), II.

Mais une telle fonction n'a ni zéro, ni pôle dans le demi-plan $\text{Re } \zeta > 0$; elle tend vers 1 quand $\zeta \rightarrow \infty$ et son module pour $\zeta = i\eta$ imaginaire pur est :

$$|g_1(\zeta)|^2 = \frac{\eta^{2(q-1)}}{\left| \prod_{k=1}^{q-1} i \left(\eta - e^{i\frac{\pi k}{q}} \right) \right|^2} = \frac{\eta^{2q}}{\eta^{2q} - 1} \cdot \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2}.$$

Ainsi, $g_1(\zeta)$ a même module que $g(\zeta)$ pour ζ imaginaire pur et il en résulte :

$$g_1(\zeta) = g(\zeta).$$

2. — $\alpha = p \frac{\pi}{2q}$, q entier, p impair.

De même on peut s'assurer directement que la fonction :

$$g_2(\zeta) = \zeta^{\frac{q-1}{2}} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\zeta^{\frac{2q}{p}} - \exp \left\{ i\pi (4k-1) \frac{q}{p} \right\} \right)}{\prod_{j=1}^{q-1} \left(\zeta - \exp \left\{ i\pi \left(j \cdot \frac{p}{q} + \frac{1}{2} \right) \right\} \right)},$$

où les déterminations de $\zeta^{\frac{q-1}{2}}$ et $\zeta^{\frac{2q}{p}}$ sont réelles pour ζ réel positif, vérifie les équations fonctionnelles (1), II et (2), II.

En outre, $g_2(\zeta)$ n'a ni zéro ni pôle dans $\text{Re } \zeta > 0$, tend vers 1 quand $\zeta \rightarrow \infty$ et a même module que $g(\zeta)$ pour ζ imaginaire pur.

On a donc :

$$g_2(\zeta) = g(\zeta).$$

Calcul de la solution régulière quand $\alpha = \frac{\pi}{2q}$, q entier.

Dans ce cas, la fonction $g(\zeta)$ est uniforme et la solution $f_2(z)$, qui correspond à l'intégrale prise sur le contour C_2 , est égale à la somme des résidus de la fonction :

$$e^{\zeta z} \cdot \frac{\zeta^{q-1}}{\prod_{k=1}^q \left(\zeta - i e^{i\pi \frac{k}{q}} \right)} \quad (\text{à un coefficient réel près}),$$

c'est-à-dire :

$$f_2(z) = \sum_{m=1}^q A_m \exp \left\{ i e^{i\pi \frac{m}{q}} z \right\}.$$

avec :

$$A_m = \frac{e^{i\pi m - i\pi \frac{m}{q}}}{\prod_{k=1, k \neq m}^q \left(e^{i\pi \frac{m}{q}} - e^{i\pi \frac{k}{q}} \right)}.$$

On en tire :

$$\frac{A_{m+1}}{A_m} = -i \cotg \left(\frac{\pi m}{2q} \right)$$

et :

$$A_q = \frac{1}{\prod_{k=1}^{q-1} e^{i\pi \frac{k}{2q}} \left(e^{-i\pi \frac{k}{2q}} + e^{i\pi \frac{k}{2q}} \right)} = a \cdot e^{-\frac{i\pi(q-1)}{4}}, \quad a \text{ étant réel.}$$

Naturellement, la solution $f_2(z)$ est régulière à l'origine et elle se comporte, pour z infini, comme :

$$A_q \exp \{ y - ix \}.$$

IV. — COMPORTEMENT DES SOLUTIONS A L'ORIGINE ET A L'INFINI

On peut montrer que la solution $f_1(z)$, qui correspond à l'intégrale prise sur C_1 , possède une singularité logarithmique à l'origine.

L'autre solution $f_2(z)$ (intégrale prise sur C_2) est régulière en ce point.

Enfin, quand z tend vers l'infini, $f_1(z)$ et $f_2(z)$ se comportent respectivement comme :

$$-2\pi i g(-i) \exp(-iz) \quad \text{et} \quad -2\pi g(-i) \exp(-iz).$$

Les preuves sont analogues à celles qui seront données plus loin dans la section IV du chapitre VI, au sujet du cas tridimensionnel.

V. - EXTENSION DES SOLUTIONS AU CAS $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

La méthode suivie antérieurement subsiste. On cherche une fonction $g(\zeta)$ qui obéisse aux mêmes équations fonctionnelles (1), II et (2), II, et il est naturel de penser que la solution qu'on a obtenue dans le cas $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ s'étend si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Rappelons que cette solution a été définie de la manière suivante :

— désignant par $g_+(\zeta)$ ou $g_-(\zeta)$, la fonction :

$$\exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{i\infty}^{-i\infty} \frac{h(|z|)}{z - \zeta} dz \right\},$$

où :

$$h(s) = L \left\{ \frac{s^{\frac{\pi}{2}}}{s^{\frac{\pi}{2}} - 1} \cdot \frac{s^2 - 1}{s^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

selon que $\text{Re } \zeta$ est > 0 ou < 0 , on prend :

— pour $\text{Re } \zeta > 0$:

$$g(\zeta) = g_+(\zeta);$$

— pour $\text{Re } \zeta < 0$:

$$g(\zeta) = g_-^*(\zeta) = g_-(\zeta) \cdot \frac{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1} \cdot \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2}$$

avec, pour déterminations de $(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}$, celles qui sont réelles pour $\zeta = \pm i\eta$ (η réel).

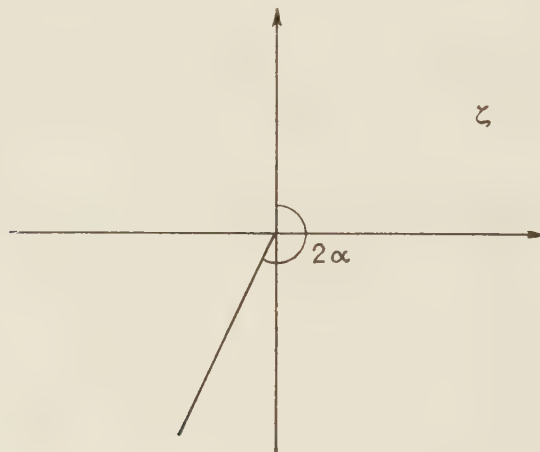


Fig. 15

Cette solution est définie sur une surface de Riemann à une infinité de feuillets, la coupure étant faite sur la partie négative de l'axe réel (fig. 15).

Cela posé, on peut vérifier, dans le cas $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, que la fonction :

$$\frac{g(\zeta e^{2i\alpha})}{g(\zeta)} \cdot \frac{\zeta - i}{\zeta + ie^{-2i\alpha}}$$

a pour module 1 quand $\zeta = i\rho e^{-2i\alpha}$, ρ réel positif.

En effet, remarquant que la partie réelle de $\zeta = i\rho e^{-2i\alpha}$ est négative, on peut écrire :

$$g(\zeta) = g_{-}^{\star}(\zeta) = \frac{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{(\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1} \cdot \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2} \cdot g_{-}(\zeta),$$

d'où :

$$\begin{aligned} L |g(i\rho e^{-2i\alpha})| &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho \sin 2\alpha}{s^2 - 2s\rho \cos 2\alpha + \rho^2} L |g(is)| ds \\ &= L \left| 1 - e^{-i\frac{\pi}{\alpha}} \rho^{-\frac{\pi}{\alpha}} \right| + L |1 - e^{4i\alpha} \rho^{-2}|. \end{aligned}$$

Tout revient donc à montrer que :

$$\begin{aligned} L |g(i\rho)| = L \left| \frac{\rho + 1}{\rho - e^{2i\alpha}} \right| &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{\rho \sin 2\alpha}{s^2 - 2s\rho \cos 2\alpha + \rho^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho \sin 2\alpha}{s^2 + 2s\rho \cos 2\alpha + \rho^2} \right\} L |g(is)| ds = L \left| 1 - e^{-i\frac{\pi}{\alpha}} \rho^{-\frac{\pi}{\alpha}} \right| + L |1 - e^{4i\alpha} \rho^{-2}|. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que la fonction :

$$H(v) = L \left\{ \frac{1 - e^{-2v}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\alpha}v}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \left(\text{avec} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right)$$

est solution de l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} H(v) = L \frac{e^v + 1}{[e^{2v} - 2 \cos 2\alpha \cdot e^v + 1]^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\sin 2\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{e^{v-u}}{e^{2(v-u)} - 2 \cos 2\alpha \cdot e^{v-u} + 1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{v-u}}{e^{2(v-u)} + 2 \cos 2\alpha \cdot e^{v-u} + 1} \right\} H(u) du = L \left[e^{-2\frac{\pi}{\alpha}v} - 2 \cos \frac{\pi^2}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\pi}{\alpha}v} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + L [e^{-4v} - 2 \cos 4\alpha \cdot e^{-2v} + 1]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ce dont on s'assure facilement (par exemple, en usant de la transformation de Fourier).

Comme, d'autre part, la condition $g(\bar{\zeta}) = \overline{g(\zeta)}$ est vérifiée, on voit aussi que :

$$\frac{g(\zeta e^{2i\alpha})}{g(\zeta)} \cdot \frac{\zeta - i}{\zeta + ie^{-2i\alpha}}$$

a pour module 1, sur $\zeta = -i\rho$, ρ réel positif.

Par suite, la fonction $\frac{g(\zeta e^{2i\alpha})}{g(\zeta)} \cdot \frac{\zeta - i}{\zeta + ie^{-2i\alpha}}$ holomorphe et sans zéro dans le secteur $+\frac{\pi}{2} - 2\alpha < \arg \zeta < -\frac{\pi}{2}$, de module 1 sur les frontières, et de limite 1, quand $\zeta \rightarrow \infty$, a pour valeur 1 dans ce secteur et ailleurs, par prolongement analytique.

Pour définir les solutions $f(z)$ du problème dans le cas $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, il sera nécessaire d'utiliser comme contour d'intégration les contours déduits de C_1 et C_2 par la rota-

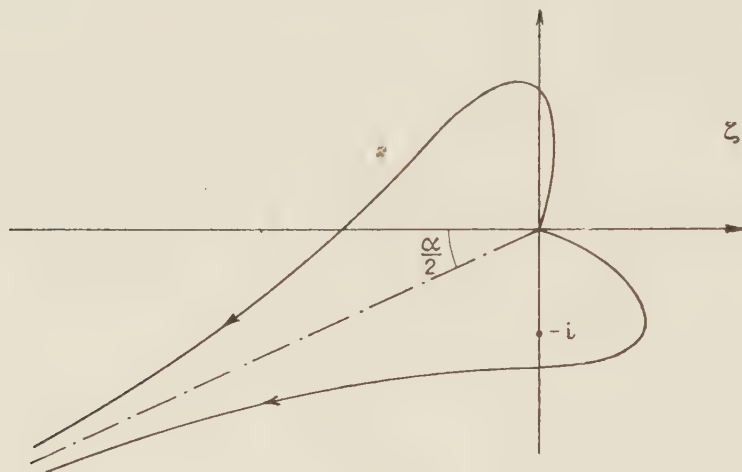


Fig. 16

tion $O, \frac{\alpha}{2}$ (fig. 16), afin que l'intégrale $\lambda \int_C e^{z\zeta} \frac{g(\zeta)}{\zeta + i} d\zeta$ existe en tout point z pris au sein du fluide.

On pourra noter enfin que pour $\alpha = \pi$ on obtient les solutions du problème du dock en profondeur infinie.

REMARQUE.

Il est intéressant de signaler ce que donne, appliquée au problème de la plage, la deuxième approximation (on suppose α petit).

On a vu au chapitre premier que l'équation qui régit le potentiel à la surface libre $\Phi = \Phi(x, 0, t)$ peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(gh \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \right),$$

h étant la profondeur au point d'abscisse x .

Si $h = x \operatorname{tg} \alpha$ on obtient, en posant $\bar{\Phi} = e^{i\sigma t} Z(x)$:

$$(xZ'(x))' + \frac{\sigma^2}{g \operatorname{tg} \alpha} Z = 0,$$

d'où l'on tire :

$$Z(x) = A \cdot J_0 \left(\frac{2\sigma}{\sqrt{g \operatorname{tg} \alpha}} \cdot \sqrt{x} \right) + B \cdot Y_0 \left(\frac{2\sigma}{\sqrt{g \operatorname{tg} \alpha}} \cdot \sqrt{x} \right),$$

où J_0 et Y_0 désignent les fonctions de Bessel d'ordre zéro de première espèce et où A et B sont deux constantes arbitraires.

CHAPITRE VI

ONDES LIQUIDES DE GRAVITÉ SUR UNE PLAGE DANS LE CAS TRIDIMENSIONNEL ⁽¹⁾

I. — NOTATIONS ET MÉTHODE DE SOLUTION

On va montrer que la méthode qui a permis d'obtenir, au chapitre V, la solution générale du problème de la plage dans le cas bidimensionnel, est susceptible d'une très remarquable extension au cas tridimensionnel.

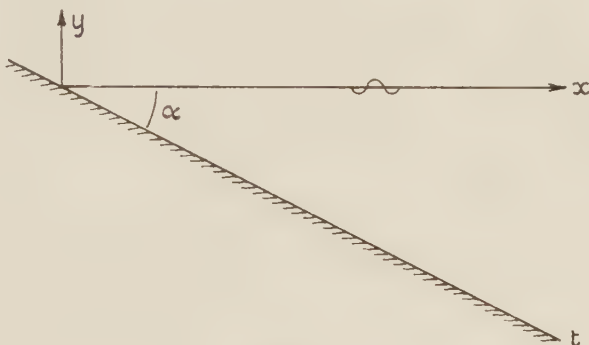


Fig. 17

Conservant les mêmes notations, on cherche maintenant les potentiels de la forme $e^{i(\sigma t + k z)} \cdot \varphi(x, y)$ de telle sorte qu'on est conduit à trouver les fonctions $\varphi(x, y)$ définies dans le secteur xOt (fig. 17) et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k^2 \varphi = 0 \quad \text{dans le secteur } xOt;$$

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } Ox;$$

$$(3) \quad \sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } Ot,$$

en utilisant des variables sans dimension.

(1) Voir *C. R. de l'Académie des Sciences*, t. 232, pp. 479-481, janvier 1951.

Nous cherchons pour $\varphi(x, y)$ une représentation de la forme :

$$(4) \quad \varphi(x, y) = \operatorname{Re} \lambda \cdot \int_C e^{\frac{k}{2} \left\{ x \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + iy \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right\}} \cdot \frac{g(\zeta)}{k \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + i} d\zeta,$$

où $g(\zeta)$ est une fonction analytique de la variable ζ , C un contour dans le plan de cette variable et λ une constante.

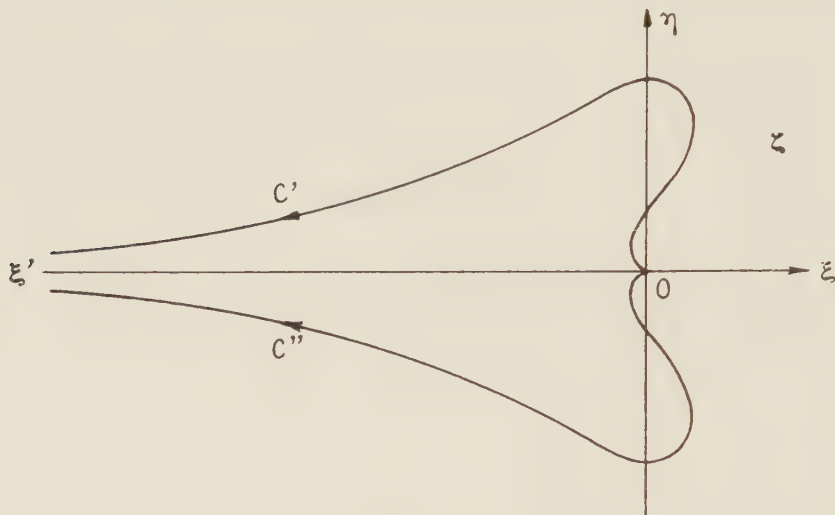


Fig. 18

Le contour C est composé de deux morceaux C' et C'' (fig. 18) :

C' est un arc ayant pour demi-tangente à l'origine l'axe réel $O \xi'$ et asymptote à l'infini au même axe;

C'' est le symétrique de C' par rapport à l'axe réel, et C désigne soit $C_1 = C' + C''$, soit $C_2 = C' - C''$.

On suppose $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $k > 0$, de sorte que l'exponentielle qui figure sous le signe $\int$ dans (4) tend vers 0 sur C à l'approche de l'origine et à l'infini.

La fonction $\varphi(x, y)$ définie par (4) vérifie visiblement l'équation (1).

Reste à faire l'étude des conditions aux limites (2) et (3).

II. — ÉTUDE DES CONDITIONS AUX LIMITES

On écrit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi = \operatorname{Im} \lambda \cdot \int_C e^{\frac{k}{2} \left\{ x \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + iy \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right\}} \cdot g(\zeta) d\zeta$$

et la condition (2) est vérifiée si :

$$g(\bar{\zeta}) = \overline{g(\zeta)},$$

à condition de prendre $\lambda = 1$ sur C_1 et $\lambda = i$ sur C_2 .

En outre :

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \operatorname{Re} \lambda \int_c \frac{k}{2} \left\{ \sin \alpha \cdot \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right. \\ \left. + i \cos \alpha \cdot \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right\} \cdot e^{\frac{k}{2} \left\{ x \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + iy \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right\}} \cdot \frac{g(\zeta)}{\frac{k}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + i} d\zeta. \end{aligned}$$

Sur le fond $x + iy = re^{-i\alpha}$, r réel > 0 et :

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ = - \operatorname{Im} \lambda \int_c \frac{k}{2} \left(\zeta e^{-i\alpha} - \frac{1}{\zeta e^{-i\alpha}} \right) \cdot e^{\frac{kr}{2} \left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{1}{\zeta e^{-i\alpha}} \right)} \cdot \frac{g(\zeta)}{\frac{k}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + i} \cdot d\zeta; \end{aligned}$$

faisant le changement de variables $\zeta e^{-i\alpha} = u$ et désignant par Γ le contour déduit de C par la rotation $O, -\alpha$, on a :

$$\sin \alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \operatorname{Im} \lambda \int_{\Gamma} \frac{k}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) e^{\frac{kr}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right)} \cdot \frac{g(ue^{i\alpha}) \cdot e^{i\alpha}}{\frac{k}{2} \left(ue^{i\alpha} - \frac{1}{ue^{i\alpha}} \right) + i} \cdot du.$$

Mais on peut remplacer dans cette intégrale Γ par C pourvu que C ait été choisi de façon à ne pas rencontrer de singularité de la fonction :

$$\frac{g(ue^{i\alpha})}{\frac{k}{2} \left(ue^{i\alpha} - \frac{1}{ue^{i\alpha}} \right) + i}$$

au cours de la rotation qui l'amène sur Γ , et, revenant à la lettre ζ , on voit que la condition aux limites (3) est vérifiée si :

$$\frac{g(\bar{\zeta} e^{i\alpha}) \cdot e^{i\alpha}}{\frac{k}{2} \left(\bar{\zeta} e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{\zeta} e^{i\alpha}} \right) + i} = \overline{\left[\frac{g(\zeta e^{i\alpha}) \cdot e^{i\alpha}}{\frac{k}{2} \left(\zeta e^{i\alpha} - \frac{1}{\zeta e^{i\alpha}} \right) + i} \right]}.$$

On est ainsi conduit à rechercher les fonctions analytiques $g(\zeta)$, solution des équations fonctionnelles :

$$(1) \quad g(\bar{\zeta}) = \overline{g(\zeta)};$$

$$(2) \quad \frac{g(\zeta e^{2i\alpha}) \cdot e^{2i\alpha}}{\frac{k}{2} \left(\zeta e^{2i\alpha} - \frac{1}{\zeta e^{2i\alpha}} \right) + i} = \frac{g(\zeta)}{\frac{k}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) - i}.$$

III. — CALCUL DE $g(\zeta)$

Les zéros de $\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) - i$, soient $\frac{i \pm i\sqrt{1-k^2}}{k}$, sont imaginaires purs si $k < 1$, hypothèse dans laquelle nous nous placerons désormais.

Posant :

$$a = \frac{1 + \sqrt{1-k^2}}{k}, \quad b = \frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{k}, \quad a > 0,$$

l'équation (2), II devient :

$$(1) \quad \frac{g(\zeta e^{2i\alpha})}{g(\zeta)} = \frac{\zeta + iae^{-2i\alpha}}{\zeta - ia} \cdot \frac{\zeta + ibe^{-2i\alpha}}{\zeta - ib}.$$

Supposant que la fonction $g(\zeta)$ n'a ni zéro, ni pôle dans le demi-plan $\operatorname{Re} \zeta > 0$, on a :

$$(2) \quad L g(\zeta e^{2i\alpha}) = L g(\zeta) + L \frac{\zeta + iae^{-2i\alpha}}{\zeta - ia} + L \frac{\zeta + ibe^{-2i\alpha}}{\zeta - ib}.$$

La fonction harmonique $L |g(\zeta)|$ définie dans le demi-plan $\operatorname{Re} \zeta > 0$ prend au point $\zeta_j = i\rho e^{-2i\alpha}$, $\rho > 0$ la valeur :

$$(3) \quad L |g(i\rho e^{-2i\alpha})| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho \sin 2\alpha}{s^2 - 2s\rho \cos 2\alpha + \rho^2} \cdot L |g(is)| ds,$$

mais tenant compte de (1), II et (2), III on a :

$$\begin{aligned} L |g(is)| &= L |g(-is)|, \\ L |g(i\rho)| &= L |g(i\rho e^{-2i\alpha})| + L \left| \frac{\rho + a}{\rho - ae^{2i\alpha}} \right| + L \left| \frac{\rho + b}{\rho - be^{2i\alpha}} \right|, \end{aligned}$$

de sorte que l'équation (3) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} L |g(i\rho)| &= L \left| \frac{\rho + a}{\rho - ae^{2i\alpha}} \right| + L \left| \frac{\rho + b}{\rho - be^{2i\alpha}} \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{\rho \sin 2\alpha}{s^2 - 2s\rho \cos 2\alpha + \rho^2} + \frac{\rho \sin 2\alpha}{s^2 + 2s\rho \cos 2\alpha + \rho^2} \right\} L |g(is)| ds, \end{aligned}$$

et posant :

$$\begin{aligned} L |g(is)| &= h(s), & s &= e^u, & h(e^u) &= H(u), & a &= e^m, \\ L |g(i\rho)| &= h(\rho), & \rho &= e^v, & h(e^v) &= H(v), & b &= e^{-w}, \end{aligned}$$

on obtient l'équation intégrale :

$$(4) \quad H(v) - L \frac{e^{v-\omega} + 1}{[e^{2(v-\omega)} - 2e^{v-\omega} \cos 2\alpha + 1]^{\frac{1}{2}}} - L \frac{e^{v+\omega} + 1}{[e^{2(v+\omega)} - 2e^{v+\omega} \cos 2\alpha + 1]^{\frac{1}{2}}} \\ = \frac{\sin 2\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{e^{v-u}}{e^{2(v-u)} - 2 \cos 2\alpha \cdot e^{v-u} + 1} + \frac{e^{v-u}}{e^{2(v-u)} + 2 \cos 2\alpha \cdot e^{v-u} + 1} \right\} H(u) du.$$

Intégration de l'équation (4).

On intègre l'équation (4) par l'usage de la transformation de Fourier :

$$\overline{H}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i w u} H(u) du.$$

On trouve immédiatement, en s'inspirant des calculs faits au chapitre V :

$$\overline{H}(w) = \frac{\pi}{2w} (e^{i w \omega} + e^{-i w \omega}) \cdot \left(\frac{e^{-\pi w} + 1}{e^{-\pi w} - 1} - \frac{e^{-2\alpha w} + 1}{e^{-2\alpha w} - 1} \right),$$

d'où :

$$h(\rho) = L \left\{ \frac{\rho^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{\rho^2 - a^2} \cdot \frac{\rho^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{\rho^2 - b^2} \cdot \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2} \cdot \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Expression de $g(\zeta)$.

Comme dans le chapitre V on désigne par $g_+(\zeta)$ ou $g_-(\zeta)$ la fonction :

$$\exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{i\infty}^{-i\infty} \frac{h(|z|)}{z - \zeta} dz \right\}$$

selon que $\operatorname{Re} \zeta$ est > 0 ou < 0 .

La fonction $g(\zeta)$ est égale à $g_+(\zeta)$ pour $\operatorname{Re} \zeta > 0$: c'est une fonction analytique sans zéro et sans pôle.

En prolongeant $g_+(\zeta)$ au travers de l'axe imaginaire pur on obtient $g(\zeta)$ quand $\operatorname{Re} \zeta < 0$.

On parvient aisément à un tel résultat en considérant la fonction :

$$g_{-}^{\star}(\zeta) = g_{-}(\zeta) \cdot \frac{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{(-\zeta^2)^{2\alpha} - a^{\frac{\pi}{\alpha}}} \cdot \frac{\zeta^2 + a^2}{\zeta^2} \cdot \frac{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{(-\zeta^2)^{2\alpha} - b^{\frac{\pi}{\alpha}}} \cdot \frac{\zeta^2 + b^2}{\zeta^2},$$

où l'on suppose avoir pris pour déterminations de $(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}$ celles qui, pour $\zeta = \pm i\eta$, η réel, sont réelles.

La fonction $g(\zeta)$ est égale à $g_{-}^{\star}(\zeta)$ si $\operatorname{Re} \zeta < 0$.

En général, il y aura pour $g(\zeta)$, une coupure le long de la partie négative de l'axe réel car les deux déterminations de $(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}$ réelles pour $\zeta = \pm i\eta$ ne coïncident, pour ζ réel négatif, que si $\alpha = \frac{\pi}{2q}$, q entier. La fonction $g(\zeta)$ est en général multiforme; elle est définie sur une surface de Riemann à une infinité de feuillets.

Singularités de $g(\zeta)$ — Étude de $g(\zeta)$ pour ζ infini.

On sait déjà que, dans le demi-plan $\operatorname{Re} \zeta > 0$, $g(\zeta)$ n'a ni zéro, ni pôle.

On obtient les singularités de $g(\zeta)$ dans $\operatorname{Re} \zeta < 0$ en écrivant :

$$(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - a^{\frac{\pi}{2\alpha}} = 0,$$

sauf :

$$\zeta = \pm ia,$$

$$(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - b^{\frac{\pi}{2\alpha}} = 0,$$

sauf :

$$\zeta = \pm ib,$$

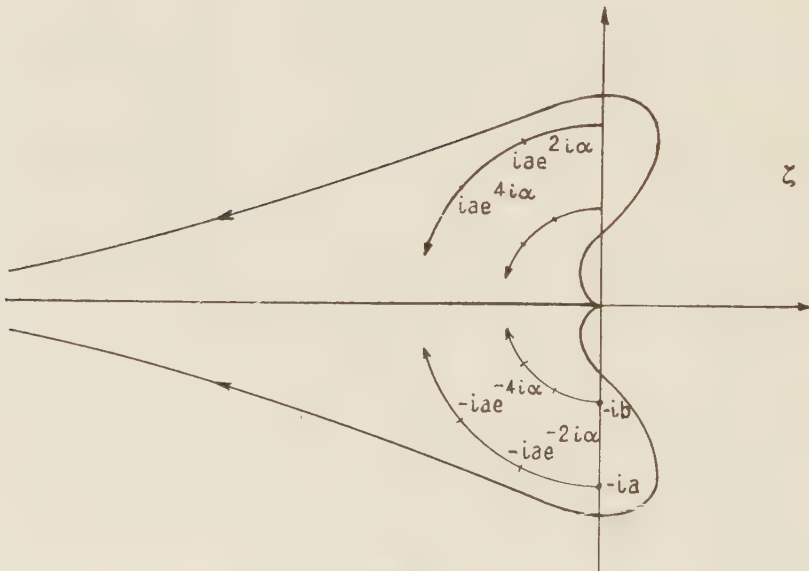


Fig. 19

c'est-à-dire :

$$\zeta = ia e^{2j.i\alpha},$$

$$\zeta = -ia e^{-2j.i\alpha},$$

$$j = 1, 2, \dots \quad \text{et}$$

$$\zeta = ib e^{2j.i\alpha},$$

$$\zeta = -ib e^{-2j.i\alpha},$$

$$j = 1, 2, \dots$$

En outre, l'origine est un point critique :

$$g(\zeta) \sim \zeta^{\frac{\pi}{2\alpha}-2}$$

et $g(\zeta)$ tend vers 1 quand $\zeta \rightarrow \infty$.

Enfin, il résulte de ce qui précède que les branches C' et C'', qui constituent le contour C, doivent être dessinées de manière à ensermer les deux demi-cercles de centre O et de rayon a et b contenus dans le demi-plan $\operatorname{Re} \zeta < 0$, comme indiqué sur la *figure 19*.

Expressions particulières de $g(\zeta)$.

Utilisant les équations (1), II et (1), III, et s'inspirant des résultats analogues du chapitre V, on obtient les expressions particulières suivantes de $g(\zeta)$:

1. — $z = \frac{\pi}{2q}$, q entier.

$$g(\zeta) = \frac{\left(\frac{\zeta}{a}\right)^{q-1}}{\prod_{l=1}^{q-1} \left(\frac{\zeta}{a} - i e^{\frac{i\pi l}{q}}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{\zeta}{b}\right)^{q-1}}{\prod_{l=1}^{q-1} \left(\frac{\zeta}{b} - i e^{\frac{i\pi l}{q}}\right)},$$

ou encore :

$$g(\zeta) = \frac{\zeta^{2q-2}}{\prod_{l=1}^{q-1} \left(\zeta^2 - \frac{2i}{k} e^{\frac{i\pi l}{q}} \cdot \zeta - e^{\frac{2i\pi l}{q}}\right)}.$$

2. — $z = p \cdot \frac{\pi}{2q}$, q entier, p impair ($p < 2q$).

$$g(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{a}\right)^{q-1} \cdot \frac{\prod_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \left(\frac{\zeta}{a}\right)^{\frac{2q}{p}} - \exp \left[i\pi (4l-1) \frac{q}{p} \right] \right\}}{\prod_{j=1}^{q-1} \left\{ \frac{\zeta}{a} - \exp \left[i\pi \left(j \cdot \frac{p}{q} + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}} \cdot \left(\frac{\zeta}{b}\right)^{q-1} \cdot \frac{\prod_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \left(\frac{\zeta}{b}\right)^{\frac{2q}{p}} - \exp \left[i\pi (4l-1) \frac{q}{p} \right] \right\}}{\prod_{j=1}^{q-1} \left\{ \frac{\zeta}{b} - \exp \left[i\pi \left(j \cdot \frac{p}{q} + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}},$$

$$g(\zeta) = \frac{\zeta^{2q-2}}{\zeta^p} \cdot \frac{\prod_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \left(\frac{\zeta}{a}\right)^{\frac{2q}{p}} - \exp \left[i\pi (4l-1) \frac{q}{p} \right] \right\} \cdot \prod_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \left(\frac{\zeta}{b}\right)^{\frac{2q}{p}} - \exp \left[i\pi (4l-1) \frac{q}{p} \right] \right\}}{\prod_{j=1}^{q-1} \left\{ \zeta^2 - \frac{2}{k} \exp \left[i\pi \left(j \cdot \frac{p}{q} + \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \zeta - \exp \left(2j \cdot \frac{p}{q} i\pi \right) \right\}}.$$

Calcul de la solution régulière quand $\alpha = \frac{\pi}{2q}$ q entier.

Nous savons que dans ce cas la fonction $g(\zeta)$ est uniforme; la solution φ_2 , qui correspond à l'intégrale prise sur le contour C_2 , est égale à la somme des résidus de la fonction :

$$e^{\frac{k}{2} \left(x \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + i y \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right)} \cdot \frac{\zeta^{2q-1}}{\prod_{l=1}^q \left(\zeta - i e^{\frac{i\pi l}{q}} \right) \cdot \prod_{l=1}^q \left(\zeta - i e^{\frac{i\pi l}{q}} \right)}.$$

Il est commode de poser ici :

$$k = \frac{1}{\operatorname{ch} \omega}, \quad a = e^{\omega}, \quad b = e^{-\omega}.$$

On a donc :

$$\varphi_2(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=1}^q A_m \exp \left[-x \frac{\sin \left(\frac{\pi m}{q} - i \omega \right)}{\operatorname{ch} \omega} - y \frac{\cos \left(\frac{\pi m}{q} - i \omega \right)}{\operatorname{ch} \omega} \right] + \sum_{m=1}^q B_m \exp \left[-x \frac{\sin \left(\frac{\pi m}{q} + i \omega \right)}{\operatorname{ch} \omega} - y \frac{\cos \left(\frac{\pi m}{q} + i \omega \right)}{\operatorname{ch} \omega} \right] \right\},$$

avec :

$$A_m = \frac{e^{2q\omega - i\pi \frac{m}{q}}}{\prod_{l=1, \neq m}^q \left(e^{\frac{i\pi m}{q}} - e^{\frac{i\pi l}{q}} \right) \cdot \prod_{l=1}^q \left(e^{\frac{i\pi m}{q} + 2\omega} - e^{\frac{i\pi l}{q}} \right)},$$

$$B_m = \frac{e^{-2q\omega - i\pi \frac{m}{q}}}{\prod_{l=1, \neq m}^q \left(e^{\frac{i\pi m}{q}} - e^{\frac{i\pi l}{q}} \right) \cdot \prod_{l=1}^q \left(e^{\frac{i\pi m}{q} - 2\omega} - e^{\frac{i\pi l}{q}} \right)}.$$

On en déduit les relations suivantes :

$$\frac{A_{m+1}}{A_m} = -\cotg \left(\frac{\pi m}{2q} \right) \cdot \cotg \left(\frac{\pi m}{2q} - i \omega \right),$$

$$\frac{B_{m+1}}{B_m} = -\cotg \left(\frac{\pi m}{2q} \right) \cdot \cotg \left(\frac{\pi m}{2q} + i \omega \right),$$

et aussi :

$$\frac{A_m}{B_{q-m+1}} = (-1)^q \cdot e^{2q\omega}.$$

Par ces formules, on peut exprimer aisément tous les coefficients A et B au moyen de l'un d'eux, par exemple :

$$A_q = \frac{e^{2q\omega}}{\prod_{l=1}^{q-1} \left(1 + e^{\frac{i\pi l}{q}}\right) \cdot \prod_{l=1}^q \left(e^{2\omega} + e^{\frac{i\pi l}{q}}\right)} \quad \text{ou} \quad B_q = \frac{e^{-2q\omega}}{\prod_{l=1}^{q-1} \left(1 + e^{\frac{i\pi l}{q}}\right) \cdot \prod_{l=1}^q \left(e^{-2\omega} + e^{\frac{i\pi l}{q}}\right)}.$$

Naturellement, la solution $\varphi_2(x, y)$ est régulière à l'origine et l'on voit qu'elle se comporte à l'infini au sein du fluide comme :

$$\text{Re} \{ A_q \exp(y - ix \operatorname{th} \omega) + B_q \exp(y + ix \operatorname{th} \omega) \}.$$

IV. — ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES SOLUTIONS AU VOISINAGE DE L'ORIGINE ET A L'INFINI

Étude des solutions au voisinage de l'origine.

Modifions le contour C de façon à lui faire prendre l'aspect de la *figure 20* ci-dessous. Il se compose alors de deux parties, l'une curviligne que nous continuerons à appeler C, l'autre D, formée de deux demi-droites A, $-\infty$ prises sur l'axe réel.

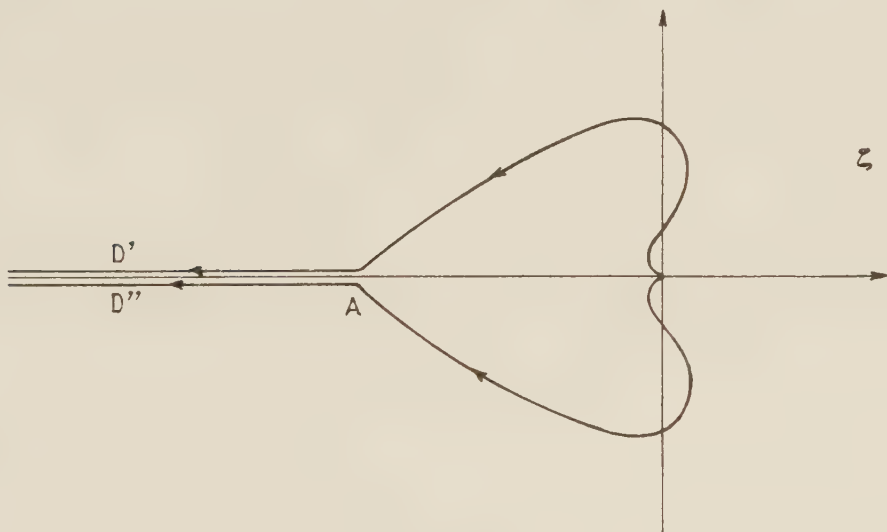


Fig. 20

Nous posons :

$$D_1 = D' + D'', \quad D_2 = D' - D''.$$

Il est clair que la portion de l'intégrale définissant φ , qui correspond à C, tend vers une limite finie quand $x^2 + y^2 \rightarrow 0$.

On a, d'autre part :

— sur D' :

$$g(\zeta) = g_1(\zeta) + i g_2(\zeta);$$

— sur D'' :

$$g(\zeta) = g_1(\zeta) - i g_2(\zeta),$$

à cause de l'équation (1), II.

Pour étudier le comportement des deux solutions φ_1 et φ_2 , on est donc ramené à chercher ce que deviennent, quand $x^2 + y^2 \rightarrow 0$, les deux quantités suivantes :

$$(1) \quad \int_A^{\infty} e^{2x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)} \cdot \left\{ \frac{k}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \cos \left[\frac{k}{2} y \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] \right. \\ \left. + \sin \left[\frac{k}{2} y \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] \cdot \frac{2 g_1(\zeta)}{\left[\frac{k}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right]^2 + 1} \right\} d\zeta;$$

$$(2) \quad - \int_A^{\infty} e^{2x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)} \cdot \left\{ \frac{k}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \cos \left[\frac{k}{2} y \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] \right. \\ \left. + \sin \left[\frac{k}{2} y \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] \cdot \frac{2 g_2(\zeta)}{\left[\frac{k}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right]^2 + 1} \right\} d\zeta,$$

la première correspondant à l'intégrale prise sur D_1 (solution φ_1), la seconde à l'intégrale prise sur D_2 (solution φ_2).

Voyons maintenant comment se comporte $g(\zeta)$ quand ζ réel tend vers $-\infty$.

On a d'abord :

$$\left| \int_{-i\infty}^{-i\infty} \frac{h(|z|)}{z - \zeta} dz \right| < \frac{1}{|\zeta|} \int_{-i\infty}^{+i\infty} |h(|z|)| d|z| < \frac{M}{|\zeta|}$$

(la fonction $h(|z|)$ est intégrable $-\infty, +\infty$).

On en déduit :

$$|g_-(\zeta) - 1| < \frac{K}{|\zeta|}$$

et :

$$g_{-}^*(\zeta) - 1 = (g_-(\zeta) - 1) \cdot \frac{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - a^{\frac{\pi}{\alpha}}} \cdot \frac{\zeta^2 + a^2}{\zeta^2} \cdot \frac{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - b^{\frac{\pi}{\alpha}}} \cdot \frac{\zeta^2 + b^2}{\zeta^2} \\ + \frac{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - a^{\frac{\pi}{\alpha}}} \cdot \frac{\zeta^2 + a^2}{\zeta^2} \cdot \frac{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{(-\zeta^2)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - b^{\frac{\pi}{\alpha}}} \cdot \frac{\zeta^2 + b^2}{\zeta^2} - 1,$$

d'où :

$$|g_{-}^*(\zeta) - 1| < \frac{K^*}{|\zeta|}$$

et :

$$|g_1(\zeta) - 1| < \frac{K^*}{|\zeta|}, \quad |g_2(\zeta)| < \frac{K^*}{|\zeta|}.$$

On voit donc que l'expression (2) tend vers une limite finie quand $x^2 + y^2 \rightarrow 0$ car les fonctions :

$$\frac{\zeta - \frac{1}{\zeta}}{\left[\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]^2 + 1} \cdot g_2(\zeta) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\left[\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]^2 + 1} \cdot g_2(\zeta)$$

sont intégrables sur A, $-\infty$, et l'expression (1) se comporte au voisinage de l'origine comme :

$$\int_A^\infty e^{\frac{k}{2}x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)} \cdot \left\{ \frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) \cos\left[\frac{k}{2}y\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right] + \sin\left[\frac{k}{2}y\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right] \right\} \frac{2}{\left[\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]^2 + 1} d\zeta.$$

Pour simplifier, supposons $y = 0$, ce qui n'enlève rien au résultat final.

Tout revient à étudier :

$$\int_A^\infty e^{\frac{k}{2}x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)} \cdot \frac{k\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)}{\left[\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]^2 + 1} d\zeta \quad \text{ou} \quad \frac{4}{k} \int_A^\infty e^{\frac{k}{2}x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}$$

quand $x \rightarrow 0$, $x > 0$.

En faisant le changement de variables :

$$\frac{k}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = u, \quad \zeta = \frac{u - \sqrt{u^2 - k^2}}{k},$$

on est ramené à l'étude de :

$$-\frac{k}{4} \int_B^\infty e^{ux} \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2 - k^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{k} \int_B^\infty e^{ux} \frac{du}{u},$$

quantité de l'ordre de $-\frac{4}{k} Lx$.

En conclusion, on peut dire que la solution φ_1 comporte une singularité logarithmique à l'origine tandis que l'autre solution φ_2 est régulière en ce point.

Comportement des solutions à l'infini.

Modifions les branches C' et C'' de la manière indiquée sur la *figure 21* ci-dessous.
Les branches encerrent les points :

$$iae^{2i\alpha}, \quad ibe^{2i\alpha}, \quad -iae^{-2i\alpha}, \quad -ibe^{-2i\alpha}$$

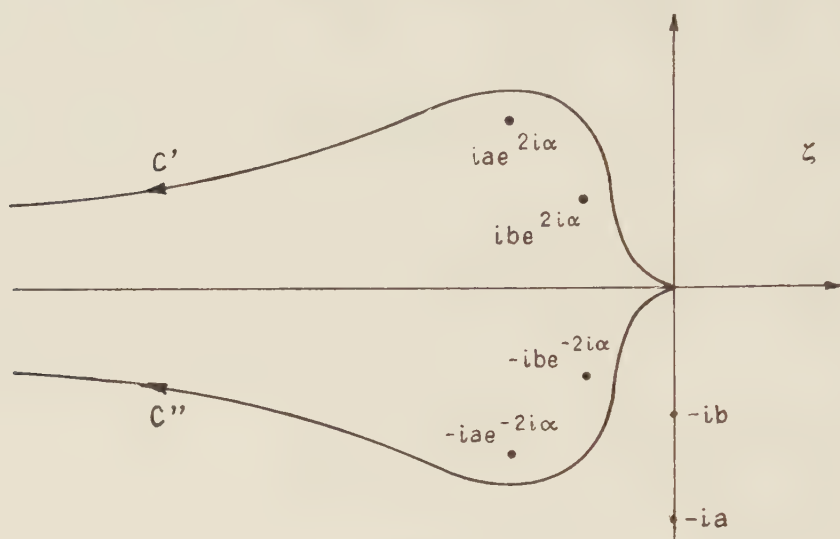


Fig. 21

mais sont telles que l'argument d'un nombre quelconque ζ pris sur elles est compris entre :

$$\frac{\pi}{2} + \alpha + \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{3\pi}{2} - \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < \alpha).$$

On a :

$$\varphi_1(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ \int_{C_1} e^{\frac{k}{2} \left\{ x \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + iy \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right\}} \cdot \frac{g(\zeta)}{\frac{k}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + i} d\zeta - 2\pi i \sum_{\text{aux pôles } -ia \text{ et } -ib} \text{résidus relatifs} \right\},$$

$$\varphi_2(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ i \int_{C_2} e^{\frac{k}{2} \left\{ x \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + iy \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right\}} \cdot \frac{g(\zeta)}{\frac{k}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + i} d\zeta - 2\pi \sum_{\text{aux pôles } -ia \text{ et } -ib} \text{résidus relatifs} \right\}.$$

Posons :

$$x + iy = re^{i\tau},$$

$$\zeta = \rho e^{i\theta}.$$

Sur le contour C on a :

$$\alpha + \varepsilon + \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$$

et :

$$x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + iy\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) = \rho r e^{i(\theta+\varphi)} + \frac{r}{\rho} e^{-i(\theta+\varphi)},$$

de sorte que l'exponentielle qui figure dans les intégrales a pour module :

$$e^{\frac{k}{2}r\left(\varphi+\frac{1}{\varphi}\right)\cos(\theta+\varphi)},$$

mais :

$$-\alpha \leq \varphi \leq 0$$

et :

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \theta + \varphi < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon,$$

d'où :

$$\cos(\theta + \varphi) < -\sin \varepsilon.$$

On en déduit que les intégrales qui figurent dans les expressions de φ_1 et φ_2 tendent vers 0 quand $r \rightarrow \infty$.

Posant :

$$k = \frac{1}{\operatorname{ch} \omega}, \quad a = e^{\omega}, \quad b = e^{-\omega},$$

on en conclut que pour $x^2 + y^2$ infini :

$$\varphi_1(x, y) \sim \operatorname{Re} 2\pi i \coth \omega \left\{ e^{-\omega} g(-ie^{-\omega}) e^{y+ixth_{\omega}} - e^{\omega} g(-ie^{\omega}) e^{y-ixth_{\omega}} \right\},$$

$$\varphi_2(x, y) \sim \operatorname{Re} 2\pi \coth \omega \left\{ e^{-\omega} g(-ie^{-\omega}) e^{y+ixth_{\omega}} - e^{\omega} g(-ie^{\omega}) e^{y-ixth_{\omega}} \right\}.$$

V. — EXTENSION DES SOLUTIONS AU CAS $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Les solutions obtenues s'étendent sans difficulté au cas $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

On raisonne comme il a été déjà indiqué au chapitre V. La seule modification à apporter est relative au contour : on réalise l'intégration sur des contours déduits de C_1 et C_2 par rotation de $\frac{\alpha}{2}$ autour de l'origine.

Enfin, pour $\alpha = \pi$, on obtient les solutions du problème du dock en profondeur infinie.

CHAPITRE VII

ONDES LIQUIDES DE GRAVITÉ DANS UN CANAL DE PROFONDEUR VARIABLE MOUVEMENTS ONDULATOIRES DE L'EAU SUR UNE PLAGE INCLINÉE DONT LA PROFONDEUR AU LARGE EST CONSTANTE

I. — INTRODUCTION

On se propose dans ce chapitre de construire les fonctions $\chi(\xi, \eta)$ bornées, solution du système :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} = 0 \quad \text{dans la bande} \quad -\alpha < \eta < 0;$$

$$(2) \quad \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = k \cdot \frac{Ae^{\xi} + B}{Ce^{\xi} + D} \cdot \chi \quad \text{sur} \quad \eta = 0;$$

$$(3) \quad \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur} \quad \eta = -\alpha,$$

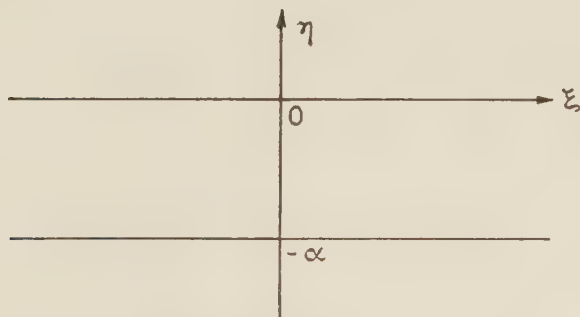


Fig. 22

où A, B, C, D, k sont des constantes positives, α un nombre positif qu'on suppose inférieur à $\frac{\pi}{2}$ (fig. 22).

L'intérêt d'un tel problème réside principalement dans le fait que par la transformation :

$$(4) \quad z = \frac{B}{D} \cdot \zeta + \frac{AD - BC}{CD} L \left(e^{\zeta} + \frac{D}{C} \right);$$

$$\zeta = \xi + i \eta, \quad z = x + iy$$

(on suppose $CD \neq 0$ et l'on prend pour détermination du logarithme celle qui est réelle quand ζ est réel; α étant plus petit que π , l'argument du logarithme ne s'annule pas dans la bande $-\alpha \leq \eta \leq 0$).

Toute fonction $\chi(\xi, \eta)$, solution des équations (1), (2), (3), devient une fonction $\varphi(x, y)$, solution du système :

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

dans la région du plan des z compris entre l'axe $x'x$ et la courbe $\mathcal{L}$ définie plus bas;

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = k \cdot \varphi$$

sur $y = 0$;

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ étant la dérivée normale prise en tout point de la courbe $\mathcal{L}$ d'équation :

$$x + iy = \frac{B}{D} (\xi - i\alpha) + \frac{AD - BC}{CD} L \left(e^{\xi - i\alpha} + \frac{D}{C} \right),$$

où ξ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

En effet, les équations (5) et (7) sont des conséquences immédiates des équations (1) et (3) et des propriétés de la transformation conforme.

L'équation (6) résulte de (2), car de :

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{\partial y}{\partial \eta} - i \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{Ae^{\zeta} + B}{Ce^{\zeta} + D}$$

on tire, pour $\eta = 0, y = 0$:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{Ae^{\zeta} + B}{Ce^{\zeta} + D}$$

et :

$$\frac{\partial \chi}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{Ae^{\zeta} + B}{Ce^{\zeta} + D},$$

d'où l'équation (6).

Or, le système (5), (6), (7) correspond à l'étude des petits mouvements irrotationnels harmoniques bidimensionnels d'un liquide dont le fond est représenté par la courbe $\mathcal{L}$ et la surface libre par l'axe des x .

Le potentiel d'un tel écoulement est :

$$\Phi(x, y, z, t) = e^{i\sigma t} \cdot \varphi(x, y),$$

avec :

$$\sigma^2 = gk, \quad g \text{ accélération de la pesanteur.}$$

II. — ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU FOND

La courbe $\mathcal{S}$ qui représente le fond du canal a pour équation :

$$x + iy = \frac{B}{D} (\xi - i\alpha) + \frac{AD - BC}{CD} L \left(e^{\xi - i\alpha} + \frac{D}{C} \right),$$

où ξ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Il sera commode de supposer $C = D$, ce qui n'apporte aucune restriction car cela revient à faire subir à $\mathcal{S}$ une translation parallèlement à l'axe des x .

Calcul de la pente du fond.

De :

$$\frac{dx + i dy}{d\xi} = \frac{dx + i dy}{d\xi} = \frac{Ae^{\xi} + B}{Ce^{\xi} + D},$$

on déduit au point de $\mathcal{S}$ qui correspond à $\xi = \xi - i\alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \frac{AC \cdot e^{2\xi} + (AD + BC) \cos \alpha \cdot e^{\xi} + BD}{|Ce^{\xi - i\alpha} + D|^2}, \\ \frac{dy}{d\xi} &= \frac{(BC - AD) \sin \alpha \cdot e^{\xi}}{|Ce^{\xi - i\alpha} + D|^2}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(BC - AD) \sin \alpha \cdot e^{\xi}}{AC \cdot e^{2\xi} + (AD + BC) \cos \alpha \cdot e^{\xi} + BD}, \end{aligned}$$

et, d'après les hypothèses faites sur A, B, C, D et α :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &> 0, \\ \frac{dy}{d\xi} &> 0 \quad \text{si} \quad BC > AD, \\ &< 0 \quad \text{si} \quad BC < AD. \end{aligned}$$

1. — $A.B.C.D \neq 0$.

Quand ξ croît de $-\infty$ à $+\infty$, x croît de $-\infty$ à $+\infty$ et y varie dans le même sens de $-\frac{B}{D} \alpha$ à $-\frac{A}{C} \alpha$.

C'est le cas d'un canal dont les profondeurs h_1 et h_2 à l'infini en amont et en aval ⁽¹⁾ sont constantes et différentes :

$$h_1 = \frac{B}{D} \alpha, \quad h_2 = \frac{A}{C} \alpha \quad (\text{fig. 23}).$$

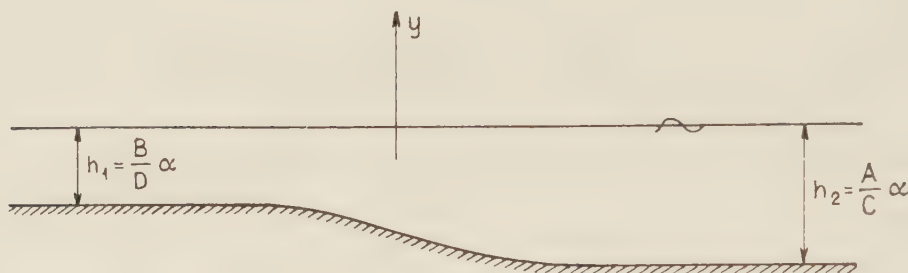


Fig. 23

On a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(h_1 - h_2) \sin \alpha \cdot e^{\xi}}{h_2 e^{2\xi} + (h_1 + h_2) \cos \alpha \cdot e^{\xi} + h_1}.$$

On suppose $C = D$ comme il a été dit plus haut.

Le point d'inflexion de $\mathcal{E}$ correspond à :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{d\xi} = \frac{(h_1 - h_2) \sin \alpha \cdot e^{\xi} \cdot (h_1 - h_2 e^{2\xi})}{(h_2 e^{2\xi} + (h_1 + h_2) \cos \alpha \cdot e^{\xi} + h_1)^2} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$e^{\xi} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}.$$

La valeur maximum de la pente est donc :

$$\text{tg } \omega = \frac{dy}{dx} = \frac{(h_1 - h_2) \cdot \sin \alpha}{2 \sqrt{h_1 h_2} + (h_1 + h_2) \cos \alpha}$$

et elle est atteinte au point d'ordonnée :

$$y = -h_m = -\frac{B}{D} \alpha + \frac{A-B}{C} \text{Arc tg } \frac{-e^{\xi} \sin \alpha}{e^{\xi} \cos \alpha + 1},$$

$$h_m = h_1 + (h_2 - h_1) \frac{\gamma}{\alpha},$$

avec :

$$\gamma = \text{Arc tg } \frac{\sqrt{h_1} \cdot \sin \alpha}{\sqrt{h_2} + \sqrt{h_1} \cos \alpha}.$$

(1) L'emploi des expressions « en amont » et « en aval » utilisées ici et dans la suite est assez commode pour désigner les parties du canal à l'infini à gauche et à l'infini à droite, bien que peut-être légèrement incorrect puisqu'il s'agit d'un problème de propagation d'ondes et non d'un problème d'écoulement.

Interprétation géométrique des angles ω et γ .

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{(h_1 - h_2) \sin \alpha}{2 \sqrt{h_1 h_2} + (h_1 + h_2) \cos \alpha} = \frac{2 (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\omega = 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Inversement, h_1 , h_2 et ω étant donnés, on calcule α par :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}.$$

Comme α ne doit pas dépasser $\frac{\pi}{2}$, on trouve pour limitation de ω :

$$\operatorname{tg} \frac{\omega_m}{2} = \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \omega_m = \frac{h_1 - h_2}{2 \sqrt{h_1 h_2}}.$$

On lit sur la *figure 24* les angles α , β , γ et ω . On a toujours $\omega < \alpha$.

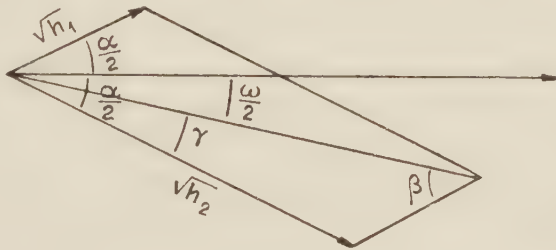


Fig. 24

La profondeur h_m du point où la pente est maximum est donc :

$$h_m = \frac{h_1 + h_2}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

ou encore, en notant que $\gamma + \frac{\omega}{2} = \frac{\alpha}{2}$, $\beta - \frac{\omega}{2} = \frac{\alpha}{2}$:

$$h_m = \frac{h_1 + h_2}{2} + \frac{\omega}{\alpha} \cdot \frac{h_1 - h_2}{2}.$$

On peut remarquer aussi que pour $\xi = 0$:

$$y = h_0 + \frac{B - A}{C} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha},$$

$$h_0 = \frac{h_1 + h_2}{2},$$

et :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h_1 - h_2}{h_2 + h_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Si $h_1 < h_2$ (cas de figure), la valeur de ξ qui correspond au point d'inflexion est négative et comme x varie dans le même sens que ξ on en tire la configuration ci-dessous

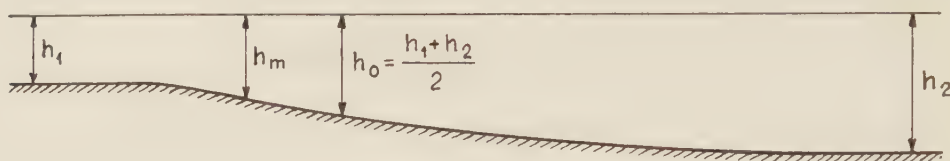


Fig. 25

qui représente la position du point de pente maximum par rapport au point de profondeur moyenne (fig. 25).

2. — $B = 0$, $A.C.D \neq 0$.

L'équation du fond est :

$$x + iy = \frac{A}{C} L(e^{z-ia} + 1)$$

et :

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\sin \alpha}{e^z + \cos \alpha};$$

quand ξ croît de $-\infty$ à $+\infty$, x croît de 0 à $+\infty$ et y décroît de 0 à $-\frac{\alpha A}{C}$.

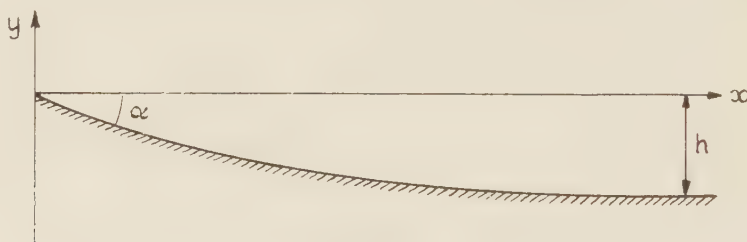


Fig. 26

L'origine est un point d'arrêt pour $\mathcal{S}$: la pente en ce point est $-\operatorname{tg} \alpha$ (fig. 26).

3. — $C = 0$ ou $D = 0$.

La transformation conforme (4) doit être remplacée par :

$$z = \frac{A}{D} e^z + \frac{B}{D} \xi.$$

Pour le fond on a les conclusions suivantes : quand $x \rightarrow -\infty$, y tend vers $-\frac{B}{D} \alpha$; quand $x \rightarrow +\infty$, y tend vers $-\infty$.

Il y a une direction asymptotique de pente $-\operatorname{tg} \alpha$.

4. — Enfin, le cas $B = C = D = 0$ correspond au problème de la plage déjà étudié.

III. — NOTATION ET RECHERCHE DE LA SOLUTION

Nous supposons dans tout ce qui suit $A.C.D \neq 0$ (cas 1 et 2).

Grâce à un changement d'origine sur l'axe des ξ on peut se ramener aux équations :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} = 0, \quad -\alpha < \eta < 0; \\ (2) \quad & \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = \frac{ae^{\xi} + b}{e^{\xi} + 1} \cdot \chi, \quad \eta = 0 \left\{ \begin{array}{l} a = k \frac{A}{C} = \frac{\sigma^2 h_2}{g \alpha}; \\ b = k \frac{B}{D} = \frac{\sigma^2 h_1}{g \alpha}; \end{array} \right. \\ (3) \quad & \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = -\alpha; \\ & a, b > 0. \end{aligned}$$

On cherche pour $\chi(\xi, \eta)$ une solution de la forme :

$$\begin{aligned} (4) \quad \chi(\xi, \eta) = & \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{iu\xi} \cdot \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)u}{\text{ch} \alpha u} \cdot \left(\frac{l}{\text{sh} \pi u} + \frac{m}{\text{ch} \pi u} \right) \cdot H(u) du \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-iu\xi} \cdot \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)u}{\text{ch} \alpha u} \cdot \left(\frac{p}{\text{sh} \pi u} + \frac{q}{\text{ch} \pi u} \right) K(u) du, \end{aligned}$$

où $H(u)$ et $K(u)$ sont des fonctions analytiques de u , C et Γ des contours dans le plan de la variable complexe u , et l, m, p, q des constantes qui seront précisées plus tard.

Sous réserve de la convergence des intégrales, la fonction $\chi(\xi, \eta)$ définie par (4) satisfait visiblement aux conditions (1) et (3).

La condition aux limites (2) s'écrit :

$$e^{\xi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \eta} - a \chi \right) + \frac{\partial \chi}{\partial \eta} - b \chi = 0, \quad \eta = 0.$$

Or, on a :

$$\left| e^{\xi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \eta} - a \chi \right) + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \eta} - b \chi \right) \right|_{\eta=0} = U + V$$

en posant :

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{i(u-i)\xi} \cdot (u \text{ th } \alpha u - a) \left(\frac{l}{\text{sh} \pi u} + \frac{m}{\text{ch} \pi u} \right) \cdot H(u) du \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{iu\xi} \cdot (u \text{ th } \alpha u - b) \left(\frac{l}{\text{sh} \pi u} + \frac{m}{\text{ch} \pi u} \right) \cdot H(u) du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-i(u+i)\xi} \cdot (u \text{ th } \alpha u - a) \left(\frac{p}{\text{sh} \pi u} + \frac{q}{\text{ch} \pi u} \right) \cdot K(u) du \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-iu\xi} \cdot (u \text{ th } \alpha u - b) \left(\frac{p}{\text{sh} \pi u} + \frac{q}{\text{ch} \pi u} \right) \cdot K(u) du. \end{aligned}$$

Indications sur la méthode de calcul.

U est la somme de deux intégrales; dans la première, on fait le changement de variables $u = i + v$. Désignant par C' le contour déduit de C par la translation de composantes 0, — 1 et conservant toujours la lettre u pour variable d'intégration, on obtient :

$$U = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{iu\zeta} [(u+i) \operatorname{th} \alpha(u+i) - a] \cdot \left(\frac{l}{\operatorname{sh} \pi u} + \frac{m}{\operatorname{ch} \pi u} \right) H(u+i) du \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{iu\zeta} (u \operatorname{th} \alpha u - b) \cdot \left(\frac{l}{\operatorname{sh} \pi u} + \frac{m}{\operatorname{ch} \pi u} \right) \cdot H(u) du.$$

A priori, on peut penser que le remplacement de C' par C dans la première intégrale va modifier cette quantité d'une somme de résidus correspondant à des pôles éventuels de la fonction sous le signe $\int$, compris entre C et C' , de sorte que :

$$U = U' + \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{iu\zeta} (u \operatorname{th} \alpha u - b) \cdot H(u) \\ - [(u+i) \operatorname{th} \alpha(u+i) - a] \cdot H(u+i) \cdot \left(\frac{l}{\operatorname{sh} \pi u} + \frac{m}{\operatorname{ch} \pi u} \right) \cdot du.$$

Prenant pour $H(u)$ une solution de l'équation fonctionnelle :

$$\frac{H(u+i)}{H(u)} = \frac{u \operatorname{th} \alpha u - b}{(u+i) \operatorname{th} \alpha(u+i) - a},$$

on aura $U = U'$.

On peut réaliser sur V une transformation analogue en posant dans la première intégrale du second membre de V , $u = -i + v$.

Revenant à la lettre u et désignant par Γ' le contour déduit de Γ par la translation 0, + 1, on obtient :

$$V = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{-iu\zeta} [(u-i) \operatorname{th} \alpha(u-i) - a] \cdot \left(\frac{p}{\operatorname{sh} \pi u} + \frac{q}{\operatorname{ch} \pi u} \right) \cdot K(u-i) du \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-iu\zeta} (u \operatorname{th} \alpha u - b) \cdot \left(\frac{p}{\operatorname{sh} \pi u} + \frac{q}{\operatorname{ch} \pi u} \right) \cdot K(u) du.$$

On peut s'attendre à ce que le remplacement de Γ' par Γ dans la première intégrale du second membre modifie l'expression de V de quelques résidus de somme V' , de sorte que :

$$V = V' + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-iu\zeta} (u \operatorname{th} \alpha u - b) K(u) \\ - [(u-i) \operatorname{th} \alpha(u-i) - a] \cdot K(u-i) \cdot \left(\frac{p}{\operatorname{sh} \pi u} + \frac{q}{\operatorname{ch} \pi u} \right) \cdot du.$$

Prenant pour $K(u)$ une solution de l'équation fonctionnelle :

$$\frac{K(u)}{K(u-i)} = \frac{(u-i) \operatorname{th} \alpha (u-i) - a}{u \operatorname{th} \alpha u - b} \quad \text{ou} \quad \frac{K(u+i)}{K(u)} = \frac{u \operatorname{th} \alpha u - a}{(u+i) \operatorname{th} \alpha (u+i) - b},$$

on aura :

$$V = V' \quad \text{et} \quad U + V = U' + V'.$$

Il suffira de montrer qu'on peut choisir les contours C , Γ et les constantes l , m , p , q de façon que $U' + V' = 0$.

IV. — ÉTUDE DES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

$$(1) \quad \frac{H(u+i)}{H(u)} = \frac{u \operatorname{th} \alpha u - b}{(u+i) \operatorname{th} \alpha (u+i) - a}$$

et :

$$(2) \quad \frac{K(u+i)}{K(u)} = \frac{u \operatorname{th} \alpha u - a}{(u+i) \operatorname{th} \alpha (u+i) - b}.$$

On pourra se borner à l'étude de l'équation (1).

Il est essentiel d'étudier d'abord la répartition des zéros de :

$$u \operatorname{sh} \alpha u - b \operatorname{ch} \alpha u, \quad \operatorname{ch} \alpha u, \quad (u+i) \operatorname{sh} \alpha (u+i) - a \operatorname{ch} \alpha (u+i), \quad \operatorname{ch} \alpha (u+i).$$

Les zéros d'une équation de la forme $z \operatorname{sh} z - k \operatorname{ch} z = 0$ sont ou réels ou imaginaires purs.

S'il existait, en effet, un zéro $z = x + iy$ avec $x, y \neq 0$, on aurait :

$$(x + iy) \operatorname{sh} (x + iy) - k \operatorname{ch} (x + iy) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$x \operatorname{sh} x \cos y - y \operatorname{ch} x \sin y - k \operatorname{ch} x \cos y = 0,$$

$$x \operatorname{ch} x \sin y + y \operatorname{sh} x \cos y - k \operatorname{sh} x \sin y = 0,$$

et éliminant k :

$$x \sin y \cos y + y \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 0$$

ou :

$$\frac{\operatorname{sh} 2x}{x} + \frac{\sin 2y}{y} = 0,$$

ce qui est impossible car :

$$\left| \frac{\operatorname{sh} 2x}{x} \right| > 2 \quad \text{et} \quad \left| \frac{\sin 2y}{y} \right| < 2.$$

Cela posé, l'équation $u \operatorname{sh} \alpha u - b \operatorname{ch} \alpha u = 0$ a deux zéros réels $+\mu$ et $-\mu$.

Tous les autres zéros sont imaginaires purs, de la forme $i\rho$, avec ρ réel solution de $\rho \operatorname{tg} \alpha \rho + b = 0$, et ont leurs modules supérieurs à $\frac{\pi}{2\alpha}$.

De même, l'équation $(u + i) \operatorname{sh} \alpha (u + i) - a \operatorname{ch} \alpha (u + i) = 0$ a pour seuls zéros $u = \pm \lambda - i$ (λ réel) et une infinité de zéros imaginaires purs de modules plus grands que $\frac{\pi}{2\alpha} - 1$.

Enfin, les zéros de $\operatorname{ch} \alpha u$ et $\operatorname{ch} \alpha (u + i)$ sont tous imaginaires purs et de modules supérieurs à $\frac{\pi}{2\alpha} - 1$.

La fonction $\frac{u \operatorname{th} \alpha u - b}{(u + i) \operatorname{th} \alpha (u + i) - a}$ n'a donc ni zéro ni pôle dans la bande $0 < \operatorname{Im} u < \frac{\pi}{2\alpha} - 1$ ($\alpha < \frac{\pi}{2}$) et cette conclusion vaut aussi pour la fonction $\frac{u \operatorname{th} \alpha u - a}{(u + i) \operatorname{th} \alpha (u + i) - b}$.

Travaillant dans la bande $0 < \operatorname{Im} u < \frac{\pi}{2\alpha} - 1$, on pose :

$$(3) \quad \begin{aligned} f(u) &= \operatorname{LH}(u), \\ g(u) &= \operatorname{L} \frac{u \operatorname{th} \alpha u - b}{(u + i) \operatorname{th} \alpha (u + i) - a} \end{aligned}$$

(on prend pour détermination du logarithme qui définit $g(u)$ celle qui est réelle quand u imaginaire pur est tel que $0 < \operatorname{Im} u < \frac{\pi}{2\alpha} - 1$), de sorte que l'équation fonctionnelle devient une équation aux différences :

$$(4) \quad f(u + i) = f(u) + g(u).$$

Solution de l'équation $f(u + i) = f(u) + g(u)$.

Il est utile de préciser d'abord le comportement de $g(u)$ quand u tend vers l'infini.

(Dans la suite, par l'emploi de l'expression « u tend vers l'infini », on sous-entendra toujours que $\operatorname{Re} u \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im} u$ restant bornée.)

On a :

$$\frac{u \operatorname{th} \alpha u - b}{(u + i) \operatorname{th} \alpha (u + i) - a} = 1 + \frac{u [\operatorname{th} \alpha u - \operatorname{th} \alpha (u + i)] - i \operatorname{th} \alpha (u + i) - b + a}{(u + i) \operatorname{th} \alpha (u + i) - a},$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{a - b - i}{u} + O\left(\frac{1}{u^2}\right) & \text{si} & \quad \operatorname{Re} u \rightarrow +\infty, \\ g(u) &= \frac{b - a - i}{u} + O\left(\frac{1}{u^2}\right) & \text{si} & \quad \operatorname{Re} u \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

On voit, en particulier, que $g(u)$ n'est pas intégrable, u variant de $-\infty + ic$ à $+\infty + ic$ ($0 < c < \frac{\pi}{2\alpha} - 1$), mais on peut remédier à cet inconvénient de la manière suivante :

— la fonction :

$$(5) \quad f^*(u) = f(u) + i[(a - b) \operatorname{th} \alpha u - i] L(-iu),$$

où l'on prend pour détermination du logarithme celle qui est réelle pour $u = i\rho$, ρ réel positif, est solution de l'équation :

$$(6) \quad f^*(u + i) - f^*(u) = g^*(u),$$

avec :

$$g^*(u) = g(u) + \theta(u)$$

et :

$$\theta(u) = i[(a - b) \operatorname{th} \alpha(u + i) - i] L[-i(u + i)] - i[(a - b) \operatorname{th} \alpha u - i] L(-iu),$$

ou :

$$\theta(u) = i[(a - b) \operatorname{th} \alpha(u + i) - i] L\left(1 + \frac{i}{u}\right) + i(a - b)(\operatorname{th} \alpha(u + i) - \operatorname{th} \alpha u) L(-iu).$$

Par suite :

$$\theta(u) = -\frac{a - b - i}{u} + O\left(\frac{1}{u^2}\right) \quad \text{si} \quad \operatorname{Re} u \rightarrow +\infty,$$

$$\theta(u) = \frac{a - b + i}{u} + O\left(\frac{1}{u^2}\right) \quad \text{si} \quad \operatorname{Re} u \rightarrow -\infty,$$

et $g^*(u)$ est d'ordre $\frac{1}{u^2}$ quand $u \rightarrow \infty$.

On peut vérifier que les dérivées successives de $g^*(u)$ sont d'ordre $\frac{1}{u^3}, \frac{1}{u^4}, \dots$, etc., dans les mêmes conditions.

La fonction $g^*(u)$ et ses dérivées sont donc intégrables, u variant de $-\infty + ic$ à $+\infty + ic$ ($0 < c < \frac{\pi}{2\alpha} - 1$).

Enfin, il vaut la peine de remarquer que $g(u)$ et $g^*(u)$ sont réels si u est imaginaire pur ($0 < \operatorname{Im} u < \frac{\pi}{2\alpha} - 1$) : en deux points symétriques par rapport à l'axe imaginaire pur les valeurs prises par $g(u)$ ou $g^*(u)$ sont donc conjuguées.

On va d'abord définir la fonction $f^*(u)$ dans la bande $\varepsilon \leq \operatorname{Im} u \leq \varepsilon + 1$, ε étant un nombre quelconque compris entre 0 et $\frac{\pi}{2\alpha} - 1$ ($0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2\alpha} - 1$).

On en déduira $f(u)$ par (5), puis $H(u)$ par (3), et l'on obtiendra le prolongement de $H(u)$ grâce à l'équation fonctionnelle (1).

Avec les notations :

$$\begin{aligned} u &= i\varepsilon + v, \\ f^*(u) &= f^*(i\varepsilon + v) = F(v), \\ g^*(u) &= g^*(i\varepsilon + v) = G(v), \end{aligned}$$

l'équation (6) peut s'écrire :

$$(7) \quad F(v+i) - F(v) = G(v).$$

Soit maintenant :

$$\bar{G}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot G(v) dv, \quad v \text{ et } t \text{ réels.}$$

L'intégrale est absolument convergente, et d'après le théorème de Riemann-Lebesgue $\bar{G}(t)$ tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, car $G(v)$ est intégrable.

On peut aller plus loin car de :

$$i t \bar{G}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G(v) d e^{i\omega t} = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} G'(v) dv$$

on déduit que $t \bar{G}(t)$ tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, puisque $G'(v)$ est intégrable.

On peut montrer ainsi que $t^3 \bar{G}(t)$ tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, d'où l'on conclut que $\bar{G}(t)$ et $t \bar{G}(t)$ sont intégrables, t variant de $-\infty$ à $+\infty$.

Cela posé, prenons comme solution :

$$(8) \quad F(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(t) \cdot e^{-i\omega t}}{e^t - 1} dt \quad \text{avec} \quad 0 \leq \text{Im} v \leq 1,$$

où le signe $P \int$ désigne la valeur principale au sens de Cauchy, qu'il est nécessaire d'introduire ici à cause de la singularité $t = 0$ de l'intégrant.

La fonction $F(v)$ définie par (8) est holomorphe dans la bande $0 \leq \text{Im} v \leq 1$ parce que la fonction :

$$\frac{t \bar{G}(t) e^{i\omega v t}}{e^t - 1}$$

est intégrable.

Et si v est réel, on a évidemment :

$$F(v+i) - F(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(t) e^{-i\omega t}}{e^t - 1} \cdot (e^t - 1) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}(t) e^{-i\omega t} dt = G(v)$$

d'après les formules de réciprocity de Fourier.

Enfin, $G(t)$ étant réel, les valeurs prises par $F(v)$ en deux points symétriques par rapport à l'axe imaginaire pur sont conjuguées.

Étude asymptotique de $H(u)$.

Posant :

$$v = w + i\tau, \quad w \text{ réel}, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{G}(t)}{e^t - 1} e^{-ivt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{G}(t)}{e^t - 1} e^{\tau t} \cdot e^{-iwt} dt$$

au voisinage de $t = 0$:

$$\frac{e^{\tau t}}{e^t - 1} = \frac{1}{t} + \left(\tau - \frac{1}{2}\right) + \dots,$$

et l'on écrit :

$$(9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{G}(t)}{e^t - 1} e^{-ivt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{\tau t}}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) \overline{G}(t) \cdot e^{-iwt} dt \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{G}(t) - \overline{G}(0)}{t} e^{-iwt} dt + \overline{G}(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iwt}}{t} dt.$$

1. — La fonction $\left(\frac{e^{\tau t}}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) \overline{G}(t)$ est intégrable sur $-\infty, +\infty$, de sorte que la première intégrale du second membre tend vers 0 quand $w \rightarrow \infty$, d'après le théorème de Riemann-Lebesgue.

2. — La fonction $\frac{\overline{G}(t) - \overline{G}(0)}{t}$ est intégrable au voisinage de $t = 0$. Par exemple :

$$\left| \frac{\overline{G}(t) - \overline{G}(0)}{t} \right| < \frac{M}{t^\beta},$$

avec $0 < \beta < 1$, car :

$$\frac{\overline{G}(t) - \overline{G}(0)}{t^{1-\beta}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ivt} - 1}{t^{1-\beta}} \overline{G}(v) dv = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |v|^{1-\beta} \cdot \frac{\sin \frac{vt}{2}}{|vt|^{1-\beta}} e^{\frac{ivt}{2}} \cdot \overline{G}(v) dv,$$

et comme $\frac{\sin \frac{vt}{2}}{|vt|^{1-\beta}}$ est borné et que $|v|^{1-\beta} \overline{G}(v)$ est intégrable, $\frac{\overline{G}(t) - \overline{G}(0)}{t^{1-\beta}}$ est borné.

Pour étudier le comportement de la deuxième intégrale de (9), on écrit :

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{G}(t) - \overline{G}(0)}{t} e^{-iwt} dt = \int_{-A}^{+A} \frac{\overline{G}(t) - \overline{G}(0)}{t} e^{-iwt} dt \\ + \left[\int_A^{+\infty} + \int_{-\infty}^{-A} \right] \frac{\overline{G}(t)}{t} e^{-iwt} dt - \left[\int_A^{+\infty} + \int_{-\infty}^{-A} \right] \overline{G}(0) \cdot \frac{e^{-iwt}}{t} dt.$$

Les deux premières intégrales du second membre de (10) tendent vers 0 quand $w \rightarrow \infty$ car dans les intervalles considérés les fonctions $\frac{\overline{G}(t) - \overline{G}(0)}{t}$ et $\frac{\overline{G}(t)}{t}$ sont intégrables, et la dernière intégrale tend vers 0 comme on s'en assure directement.

3. — Enfin, la troisième intégrale de (9) vaut $\mp i \pi \overline{G}(0)$ selon que w est > 0 ou < 0 .

On a finalement prouvé que $F(v)$ tend vers :

$$\mp i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(v) dv \quad \text{quand} \quad v \rightarrow \pm \infty.$$

Il en résulte que $f(u)$ se comporte à l' ∞ comme :

$$f(u) \sim \mp i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(v) dv - i [(a-b) \operatorname{th} \alpha u - i] \cdot L(-iu).$$

En conclusion, on a défini dans la bande $\varepsilon \leq \operatorname{Im} u \leq \varepsilon + 1$ une fonction analytique $H(u)$ sans zéro, ni pôle, qui tend vers 0 comme $\frac{1}{u}$ quand $u \rightarrow \pm \infty$ et qui satisfait à la condition :

$$\frac{H[v + i(\varepsilon + 1)]}{H(v + i\varepsilon)} = \frac{(v + i\varepsilon) \operatorname{th} \alpha(v + i\varepsilon) - b}{[v + i(\varepsilon + 1)] \operatorname{th} \alpha[v + i(\varepsilon + 1)] - a}, \quad v \text{ réel.}$$

Rappelons enfin que pour effectuer le prolongement analytique au delà de la bande $\varepsilon \leq \operatorname{Im} u \leq \varepsilon + 1$ on se servira de l'équation :

$$\frac{H(u + i)}{H(u)} = \frac{u \operatorname{th} \alpha u - b}{(u + i) \operatorname{th} \alpha(u + i) - a}.$$

Étude des zéros et des pôles de $H(u)$ — Unicité des solutions — Relations entre $H(u)$ et $K(u)$.

Utilisant l'équation fonctionnelle (1) et le fait que $H(u)$ n'a ni zéro ni pôle dans la bande $\varepsilon \leq \operatorname{Im} u \leq \varepsilon + 1$, on voit d'abord que les points :

$$\pm \mu - ni, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sont des pôles simples, tandis que les points :

$$\pm \lambda - (m + 1)i, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

sont des zéros simples de $H(u)$.

Tous les autres zéros et pôles sont imaginaires purs et ont leurs modules supérieurs à $\frac{\pi}{2\alpha}$.

Les fonctions $(u \operatorname{th} \alpha u - a) H(u)$ et $(u \operatorname{th} \alpha u - a) K(u)$ n'ont pas de pôle imaginaire pur respectivement dans les intervalles :

$$-\frac{\pi}{2\alpha} < \operatorname{Im} u < \frac{\pi}{2\alpha} + 1 \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2\alpha} - 1 < \operatorname{Im} u < \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Il n'est pas inutile de remarquer que la solution obtenue ne dépend pas de ε . Car si $H_1(u)$ est une autre solution correspondant à un ε_1 , qui d'ailleurs peut être égal à ε , et si $H_1(u)$ est d'ordre $\frac{1}{u}$ quand $\operatorname{Re} u \rightarrow \infty$, alors $\frac{H_1(u)}{H(u)}$ fonction analytique, sans singularité, périodique de période i et bornée, est une constante.

On adoptera pour $K(u)$ la fonction déduite de la solution $H(u)$ par permutation de a et b . D'ailleurs, après multiplication membre à membre des équations fonctionnelles (1) et (2), on obtient :

$$\frac{H(u+i) \cdot K(u+i)}{H(u) \cdot K(u)} = \frac{(u \operatorname{th} \alpha u - a)(u \operatorname{th} \alpha u - b)}{[(u+i) \operatorname{th} \alpha (u+i) - a] \cdot [(u+i) \operatorname{th} \alpha (u+i) - b]}.$$

La fonction $H(u) \cdot K(u) (u \operatorname{th} \alpha u - a)(u \operatorname{th} \alpha u - b)$ est donc périodique de période i . Mais dans la bande $\varepsilon \leq \operatorname{Im} u \leq \varepsilon + 1$ elle n'a pas de pôle et elle est bornée.

On a donc dans tout le plan :

$$H(u) \cdot K(u) \cdot (u \operatorname{th} \alpha u - a)(u \operatorname{th} \alpha u - b) = C^{\text{te}}.$$

D'autre part, il est clair que la fonction $\frac{H(u)}{K(-u)}$ est périodique de période i car $K(-u)$ vérifie la même équation fonctionnelle que $H(u)$.

Dans la bande $\varepsilon \leq \operatorname{Im} u \leq \varepsilon + 1$ ($0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2\alpha} - 1$), $K(-u)$ a pour seuls zéros $\pm \mu + ni$ et pour seuls pôles $\pm \lambda + ni$, avec n entier tel que $\varepsilon < n < \varepsilon + 1$.

La fonction :

$$\frac{H(u)}{K(-u)} \cdot \frac{\operatorname{sh} \pi(u - \mu) \operatorname{sh} \pi(u + \mu)}{\operatorname{sh} \pi(u - \lambda) \operatorname{sh} \pi(u + \lambda)},$$

périodique de période i , n'a ni zéro ni pôle dans la bande $\varepsilon \leq \operatorname{Im} u \leq \varepsilon + 1$ et y est bornée.

On a donc partout :

$$\frac{H(u)}{K(-u)} \cdot \frac{\operatorname{sh} \pi(u - \mu) \operatorname{sh} \pi(u + \mu)}{\operatorname{sh} \pi(u - \lambda) \operatorname{sh} \pi(u + \lambda)} = C^{\text{te}}.$$

Sur une autre méthode de résolution des équations fonctionnelles (1) et (2).

Nous avons jusqu'ici résolu l'équation (1) en utilisant des transformées de Fourier de fonctions intégrables et pour y parvenir nous avons dû introduire un artifice, en l'espèce la fonction $f^*(u)$.

Mais les formules obtenues étant peu indiquées pour le calcul numérique, il est intéressant de donner une autre méthode qui conduise plus directement à la solution du problème, quitte à accroître un peu les calculs servant à la justifier.

Nous posons :

$$g(u) = 1, \quad \frac{u \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} u - b}{(u + i) \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} (u + i)} - a, \quad 0 < \operatorname{Im} u < \frac{\pi}{2\alpha} - 1,$$

$$f(u) = \operatorname{LH}(u),$$

$$\mathcal{G}(v) = g(i\varepsilon + v), \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2\alpha} - 1,$$

$$\mathcal{F}(v) = f(i\varepsilon + v),$$

puis :

$$\bar{\mathcal{G}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivt} \mathcal{G}(v) dv,$$

et l'on prend :

$$(11) \quad \mathcal{F}(v) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathcal{G}}(t) \cdot \frac{e^{-ivt} - 1}{e^t - 1} dt, \quad 0 \leq \operatorname{Im} v \leq 1,$$

solution que nous allons justifier.

Étude de $\mathcal{G}(t)$ au voisinage de $t = 0$.

On sait que :

$$\mathcal{G}(v) = \frac{a - b - i}{v} + O\left(\frac{1}{v^2}\right) \quad \text{si} \quad \operatorname{Re} v \rightarrow +\infty,$$

$$\mathcal{G}(v) = \frac{b - a - i}{v} + O\left(\frac{1}{v^2}\right) \quad \text{si} \quad \operatorname{Re} v \rightarrow -\infty.$$

Aussi, l'intégrale qui définit $\bar{\mathcal{G}}(t)$ existe pour tout t , sauf peut-être $t = 0$.

Pour faire l'étude au voisinage de $t = 0$, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-A}^{+A} e^{ivt} \mathcal{G}(v) dv + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{+A}^{+\infty} e^{ivt} \left(\mathcal{G}(v) - \frac{a - b - i}{v} \right) dv \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{-A} e^{ivt} \left(\mathcal{G}(v) - \frac{b - a - i}{v} \right) dv \\ &\quad + \frac{2(a - b)}{\sqrt{2}\pi} \int_A^{+\infty} \frac{\cos vt}{v} dv - \frac{i}{\sqrt{2}\pi} \left[\int_{-\infty}^{-A} + \int_{+A}^{+\infty} \right] e^{ivt} \frac{dv}{v}. \end{aligned}$$

Les trois premières intégrales du second membre sont uniformément convergentes et leur somme $\bar{\mathcal{G}}_1(t)$, continue pour $t = 0$, satisfait à une condition de Lipschitz :

$$|\bar{\mathcal{G}}_1(t) - \bar{\mathcal{G}}_1(0)| < k_1 t^\beta,$$

avec $0 < \beta < 1$.

On peut donc écrire :

$$\bar{\mathcal{G}}(t) = \bar{\mathcal{G}}_1(t) + \frac{2(a - b)}{\sqrt{2}\pi} \int_{+A}^{+\infty} \frac{\cos w}{w} dw \pm \frac{\pi}{\sqrt{2}\pi} + \frac{i}{\sqrt{2}\pi} \int_{-A}^{+A} \frac{e^{ivt}}{v} dv$$

en prenant dans le second membre le signe $+$ si $t > 0$, le signe $-$ si $t < 0$; puis :

$$\bar{\zeta}_1(t) = \bar{\zeta}_1(t) + \frac{2(a-b)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda|t|}^{\infty} \frac{\cos w}{w} dw \pm \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\Lambda t} \frac{\sin w}{w} dw + C^{te}$$

et :

$$(12) \quad \bar{\zeta}_1(t) = \bar{\zeta}_2(t) - \frac{2(a-b)}{\sqrt{2\pi}} L|t| \pm \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}},$$

la fonction $\bar{\zeta}_2(t)$, continue pour $t = 0$, satisfaisant à une condition de Lipschitz :

$$|\bar{\zeta}_2(t) - \bar{\zeta}_2(0)| < k_2 \cdot t^\beta, \quad 0 < \beta < 1.$$

Formule de réciprocité de Fourier pour $\zeta(v)$.

La formule qui définit $\bar{\zeta}_1(t)$ peut s'écrire :

$$it \bar{\zeta}_1(t) = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \zeta'(v) dv$$

et la fonction $\zeta'(v)$ étant intégrable et dérivable, on a, par la formule de réciprocité de Fourier :

$$\zeta'(v) = - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} t \cdot \bar{\zeta}_1(t) dt,$$

mais on sait que les fonctions $t\bar{\zeta}_1(t)$ et $\bar{\zeta}_1(t)$ sont intégrables (car les dérivées de $\zeta(v)$ jusqu'à l'ordre de trois au moins, le sont aussi), ce qui permet de déduire de la formule précédente :

$$\zeta(v) + C^{te} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \bar{\zeta}_1(t) dt,$$

la constante étant d'ailleurs nulle, car $\zeta(v)$ et le second membre tendent vers 0 quand $v \rightarrow \infty$.

On peut donc appliquer la formule de réciprocité de Fourier à la fonction $\zeta(v)$.

Étude de $\mathcal{F}(v)$.

La fonction $\mathcal{F}(v)$ définie par (11) est holomorphe dans la bande $0 \leq \text{Im} v \leq 1$.

En outre, on a visiblement, si v est réel :

$$\mathcal{F}(v+i) - \mathcal{F}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\zeta}_1(t) e^{-i\omega t} dt = \zeta(v).$$

Reste à faire l'étude de $\mathcal{F}(v)$ quand $\text{Re} v \rightarrow \pm \infty$.

Posant :

$$v = w + i\tau, \quad w \text{ réel}, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

on a :

$$\mathcal{F}(v) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathcal{G}}(t) e^{\tau t} \cdot \frac{e^{-i\omega t} - 1}{e^t - 1} dt + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathcal{G}}(t) \frac{e^{\tau t} - 1}{e^t - 1} dt$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(v) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} & \left\{ \int_{-A}^{+A} \bar{\mathcal{G}}(t) \frac{e^{-i\omega t} - 1}{t} dt + \int_{-A}^{+A} \left(\frac{e^{\tau t}}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) \bar{\mathcal{G}}(t) \cdot (e^{-i\omega t} - 1) dt \right. \\ & \left. + \left[\int_A^{+\infty} + \int_{-\infty}^{-A} \right] \bar{\mathcal{G}}(t) \cdot \frac{e^{\tau t}}{e^t - 1} \cdot (e^{-i\omega t} - 1) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathcal{G}}(t) \frac{e^{\tau t} - 1}{e^t - 1} dt \right\} \end{aligned}$$

et toutes les intégrales du second membre, sauf peut-être la première, ont une limite finie indépendante de τ quand $w \rightarrow \infty$.

Tout revient à étudier le comportement de la quantité :

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-A}^{+A} \bar{\mathcal{G}}(t) \cdot \frac{e^{-i\omega t} - 1}{t} dt,$$

c'est-à-dire, en utilisant la formule (12) :

$$-\frac{a-b}{\pi} \int_{-A}^{+A} \frac{L|t|}{t} (e^{-i\omega t} - 1) dt + \frac{1}{2} \int_0^{+A} \frac{1}{t} (e^{-i\omega t} - 1) dt - \frac{1}{2} \int_{-A}^0 \frac{1}{t} (e^{-i\omega t} - 1) dt$$

ou :

$$-\frac{a-b}{\pi} \int_{-A}^{+A} \frac{L|t|}{t} (e^{-i\omega t} - 1) dt + \int_0^{+A} \frac{\cos \omega t - 1}{t} dt,$$

qui s'écrit :

$$\frac{a-b}{\pi} \int_{-Aw}^{+Aw} \frac{L|u|}{u} (e^{-iu} - 1) du + \int_0^{+Aw} \frac{\cos u - 1}{u} du + \frac{a-b}{\pi} L|w| \cdot \int_{-Aw}^{+Aw} \frac{e^{-iu} - 1}{u} du,$$

et cette expression se comporte comme :

$$\begin{aligned} -i(a-b)L|w| - L|w| & \quad \text{si} \quad w \rightarrow +\infty, \\ i(a-b)L|w| - L|w| & \quad \text{si} \quad w \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

de sorte que la fonction $H(u)$ obtenue tend vers 0 comme $\frac{1}{u}$ dans la bande $\varepsilon \leq Imu \leq \varepsilon + 1$ quand $u \rightarrow \infty$.

Cette solution, qu'on prolongera en se servant de l'équation (1), est identique à celle déjà obtenue par les formules (8), (5), car elle possède les mêmes zéros et les mêmes pôles et se comporte à l'infini de la même manière.

V. — RETOUR SUR LE CALCUL DE U ET DE V — CHOIX DES CONTOURS C ET Γ ET DES CONSTANTES l, m, p, q

CAS $a, b \neq 0$.

Ondes de gravité dans un canal de profondeur variable.

Nous prenons pour C une droite :

$$\operatorname{Im} u = c \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} < c < 1.$$

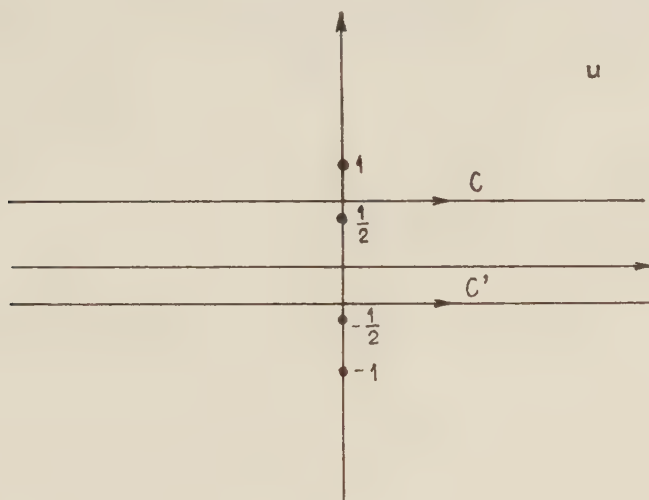


Fig. 27

Entre C et C' (fig. 27) la fonction :

$$e^{iu\zeta} [(u+i) \operatorname{th} \alpha(u+i) - a] \cdot \left(\frac{l}{\operatorname{sh} \pi u} + \frac{m}{\operatorname{ch} \pi u} \right) \cdot H(u+i)$$

a deux pôles en :

$$u = 0 \quad \text{et} \quad u = \frac{i}{2}.$$

On en déduit :

$$U' = - \left\{ (i \operatorname{th} \alpha i - a) \frac{l}{\pi} H(i) + \left[\frac{3i}{2} \operatorname{th} \frac{3\alpha i}{2} - a \right] \cdot \frac{m}{\pi i} H\left(\frac{3i}{2}\right) \cdot e^{-\frac{\zeta}{2}} \right\},$$

c'est-à-dire :

$$U' = \frac{lb}{\pi} H(0) - \frac{m}{\pi i} \left(\frac{i}{2} \operatorname{th} \frac{\alpha i}{2} - b \right) H\left(\frac{i}{2}\right) e^{-\frac{\zeta}{2}}.$$

On prend pour Γ le contour indiqué sur la figure 28 ci-après.

Entre Γ et Γ' la fonction :

$$e^{-iu\zeta} [(u-i) \operatorname{th} \alpha(u-i) - a] \cdot \left(\frac{p}{\operatorname{sh} \pi u} + \frac{q}{\operatorname{ch} \pi u} \right) \cdot K(u-i)$$

a deux pôles en :

$$u = 0 \quad \text{et} \quad u = -\frac{i}{2}.$$

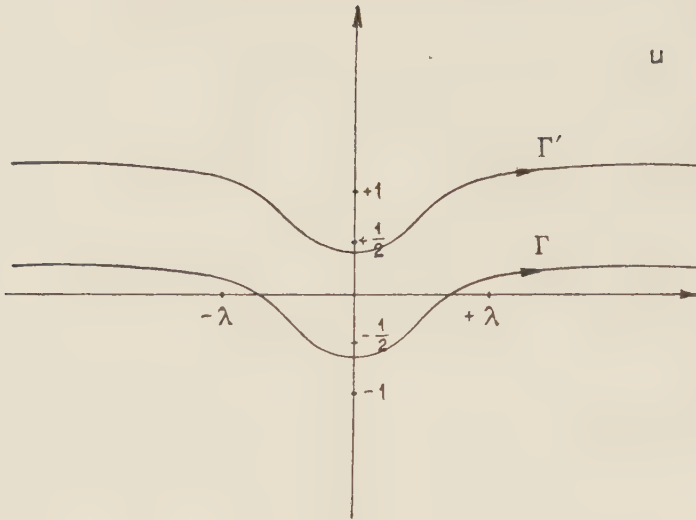


Fig. 28

On en déduit :

$$V' = [-i \operatorname{th}(-\alpha i) - a] \cdot \frac{p}{\pi} K(-i) + \left[-\frac{3i}{2} \operatorname{th}\left(-\frac{3\alpha i}{2}\right) - a \right] \cdot \frac{q}{-\pi i} K\left(-\frac{3i}{2}\right) \cdot e^{\frac{i}{2}},$$

c'est-à-dire :

$$V' = -\frac{bp}{\pi} K(0) - \frac{q}{\pi i} \left[-\frac{i}{2} \operatorname{th}\left(-\frac{\alpha i}{2}\right) - b \right] K\left(-\frac{i}{2}\right) e^{\frac{i}{2}}.$$

En définitive, pour avoir $U' + V' = 0$, on choisira l, m, p, q de telle sorte que :

$$\begin{aligned} p K(0) - l H(0), \\ m H\left(\frac{i}{2}\right) + q K\left(-\frac{i}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

On prendra m et q imaginaires purs, p et l réels de façon que $\varphi(x, y)$ soit réel.

ÉTUDE DU CAS $b = 0$.

Mouvements ondulatoires de l'eau sur une plage inclinée dont la profondeur au large est constante.

Le calcul précédent doit être légèrement modifié ici car $\mu = -i$ est un zéro double pour $K(u)$.

De sorte que :

$$U' = -(i \operatorname{th}(\alpha i) - a) \cdot \frac{l}{\pi} H(i) - \frac{m}{\pi i} \left(\frac{i}{2} \operatorname{th} \frac{\alpha i}{2} \right) H\left(\frac{i}{2}\right) \cdot e^{\frac{i}{2}},$$

$$V' = -\frac{q}{\pi i} \left[-\frac{i}{2} \operatorname{th}\left(-\frac{\alpha i}{2}\right) \right] K\left(-\frac{i}{2}\right) \cdot e^{\frac{i}{2}}.$$

On satisfait à la condition $U' + V' = 0$ en prenant :

$$l = 0,$$

$$m H\left(\frac{i}{2}\right) + q K\left(-\frac{i}{2}\right) = 0.$$

VI. — COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS

CAS $a, b \neq 0$.

1. — ξ tend vers $+\infty$ (fig. 29).

On remplace Γ par Γ_1 de sorte que, en tenant compte des pôles $+\lambda$ et $-\lambda$ de la fonction $K(u)$:

$$\begin{aligned} \chi(\xi, \eta) = & \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{iu\xi} \cdot \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)u}{\text{ch} \alpha u} \cdot \left(\frac{l}{\text{sh} \pi u} + \frac{m}{\text{ch} \pi u} \right) H(u) du \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^{-iu\xi} \cdot \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)u}{\text{ch} \alpha u} \cdot \left(\frac{p}{\text{sh} \pi u} + \frac{q}{\text{ch} \pi u} \right) K(u) du \\ & - e^{-i\lambda\xi} \cdot \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)\lambda}{\text{ch} \alpha \lambda} \cdot \left(\frac{p}{\text{sh} \pi \lambda} + \frac{q}{\text{ch} \pi \lambda} \right) \cdot \lim_{\sigma \rightarrow \lambda} (\sigma - \lambda) K(\sigma) \\ & - e^{i\lambda\xi} \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)\lambda}{\text{ch} \alpha \lambda} \cdot \left(-\frac{p}{\text{sh} \pi \lambda} + \frac{q}{\text{ch} \pi \lambda} \right) \lim_{\sigma \rightarrow -\lambda} (\sigma + \lambda) K(\sigma); \end{aligned}$$

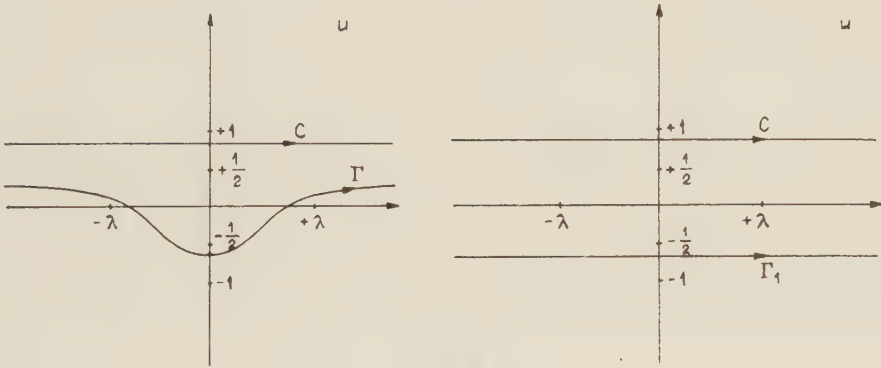


Fig. 29

d'autre part, en posant $u = t + ih$ on a :

$$\begin{aligned} \int_c e^{iu\xi} \cdot \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)u}{\text{ch} \alpha u} \cdot \left(\frac{l}{\text{sh} \pi u} + \frac{m}{\text{ch} \pi u} \right) \cdot H(u) du &= e^{-h\xi} \cdot \int e^{it\xi} (\quad) dt, \\ \int_{\Gamma_1} e^{-iu\xi} \cdot \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)u}{\text{ch} \alpha u} \cdot \left(\frac{p}{\text{sh} \pi u} + \frac{q}{\text{ch} \pi u} \right) \cdot K(u) du &= e^{h\xi} \int e^{-it\xi} (\quad) dt. \end{aligned}$$

Quand ξ tend vers $+\infty$ ces intégrales tendent vers 0 car h est > 0 dans la première et est < 0 dans la seconde.

Ainsi, quand $\xi \rightarrow +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \chi(\xi, \eta) &\sim e^{i\lambda\xi} \cdot \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)\lambda}{\text{ch} \alpha \lambda} \cdot \left(\frac{p}{\text{sh} \pi \lambda} - \frac{q}{\text{ch} \pi \lambda} \right) \lim_{\sigma \rightarrow \lambda} (\sigma + \lambda) K(\sigma) \\ &\quad - e^{-i\lambda\xi} \cdot \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)\lambda}{\text{ch} \alpha \lambda} \cdot \left(\frac{p}{\text{sh} \pi \lambda} + \frac{q}{\text{ch} \pi \lambda} \right) \lim_{\sigma \rightarrow \lambda} (\sigma - \lambda) K(\sigma). \end{aligned}$$

2. — ξ tend vers $-\infty$ (fig. 30).

On remplace C par C_2 et Γ par Γ_2 .

On a :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{iu\xi} \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)u}{\text{ch} \alpha u} \left(\frac{l}{\text{sh} \pi u} + \frac{m}{\text{ch} \pi u} \right) H(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} e^{iu\xi} \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)u}{\text{ch} \alpha u} \left(\frac{l}{\text{sh} \pi u} + \frac{m}{\text{ch} \pi u} \right) H(u) du \\ &\quad \left[\frac{l}{\pi} H(0) + e^{-\frac{i}{2}} \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)}{\text{ch} \frac{\alpha i}{2}} \frac{i}{2} \frac{m}{\pi i} H\left(\frac{i}{2}\right) \right] \\ &\quad - \left[e^{i\mu\xi} \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)\mu}{\text{ch} \alpha \mu} \cdot \left(\frac{l}{\text{sh} \pi \mu} + \frac{m}{\text{ch} \pi \mu} \right) \cdot \lim_{\sigma \rightarrow \mu} (\sigma - \mu) H(\sigma) \right] \\ &- \left[e^{-i\mu\xi} \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)\mu}{\text{ch} \alpha \mu} \cdot \left(-\frac{l}{\text{sh} \pi \mu} + \frac{m}{\text{ch} \pi \mu} \right) \cdot \lim_{\sigma \rightarrow -\mu} (\sigma + \mu) H(\sigma) \right] \end{aligned}$$

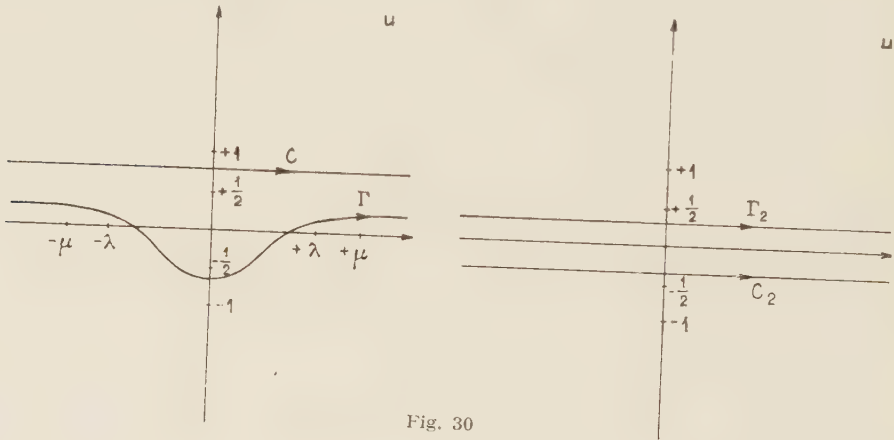


Fig. 30

et :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-iu\xi} \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)u}{\text{ch} \alpha u} \cdot \left(\frac{p}{\text{sh} \pi u} + \frac{q}{\text{ch} \pi u} \right) K(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} e^{-iu\xi} \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)u}{\text{ch} \alpha u} \cdot \left(\frac{p}{\text{sh} \pi u} + \frac{q}{\text{ch} \pi u} \right) K(u) du \\ &+ \frac{p}{\pi} K(0) + e^{-\frac{i}{2}} \cdot \frac{\text{ch}(\alpha + \eta)}{\text{ch} \frac{\alpha i}{2}} \frac{i}{2} \left(-\frac{q}{\pi i} \right) \cdot K\left(-\frac{i}{2}\right), \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \chi(\xi, \eta) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} e^{i\mu z} \frac{\operatorname{ch}(\alpha + \eta) u}{\operatorname{ch} \alpha u} \cdot \left(\frac{l}{\operatorname{sh} \pi u} + \frac{m}{\operatorname{ch} \pi u} \right) H(u) du \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} e^{-i\mu z} \frac{\operatorname{ch}(\alpha + \eta) u}{\operatorname{ch} \alpha u} \left(\frac{p}{\operatorname{sh} \pi u} + \frac{q}{\operatorname{ch} \pi u} \right) K(u) du \\ & + \left\{ e^{-i\mu z} \frac{\operatorname{ch}(\alpha + \eta) \mu}{\operatorname{ch} \alpha \mu} \left(\frac{l}{\operatorname{sh} \pi \mu} - \frac{m}{\operatorname{ch} \pi \mu} \right) \lim_{\sigma \rightarrow -\mu} (\sigma + \mu) H(\sigma) \right\} \\ & - \left\{ e^{i\mu z} \frac{\operatorname{ch}(\alpha + \eta) \mu}{\operatorname{ch} \alpha \mu} \cdot \left(\frac{l}{\operatorname{sh} \pi \mu} + \frac{m}{\operatorname{ch} \pi \mu} \right) \lim_{\sigma \rightarrow \mu} (\sigma - \mu) H(\sigma) \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, quand $\xi \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} \chi(\xi, \eta) \sim & e^{-i\mu z} \frac{\operatorname{ch}(\alpha + \eta) \mu}{\operatorname{ch} \alpha \mu} \cdot \left(\frac{l}{\operatorname{sh} \pi \mu} - \frac{m}{\operatorname{ch} \pi \mu} \right) \lim_{\sigma \rightarrow -\mu} (\sigma + \mu) H(\sigma) \\ & - e^{i\mu z} \frac{\operatorname{ch}(\alpha + \eta) \mu}{\operatorname{ch} \alpha \mu} \left(\frac{l}{\operatorname{sh} \pi \mu} + \frac{m}{\operatorname{ch} \pi \mu} \right) \lim_{\sigma \rightarrow \mu} (\sigma - \mu) H(\sigma). \end{aligned}$$

Calcul de la solution en fonction de l'amplitude et de la phase de l'onde en amont.

En résumé, nous venons de montrer que :

$$\begin{aligned} \chi(\xi, \eta) \sim & \operatorname{Re} \frac{2L}{\operatorname{ch} \alpha \lambda} \left(\frac{p}{\operatorname{sh} \pi \lambda} - \frac{q}{\operatorname{ch} \pi \lambda} \right) e^{i\lambda \xi} \operatorname{ch}(\alpha + \eta) \lambda \quad \text{quand} \quad \xi \rightarrow +\infty, \\ \sim & \operatorname{Re} \frac{2M}{\operatorname{ch} \alpha \mu} \left(\frac{l}{\operatorname{sh} \pi \mu} - \frac{m}{\operatorname{ch} \pi \mu} \right) e^{-i\mu \xi} \operatorname{ch}(\alpha + \eta) \mu \quad \text{quand} \quad \xi \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

L et M désignant respectivement les résidus des fonctions K(u) et H(u) relatifs aux pôles $-\lambda$ et $-\mu$.

Revenant aux variables x et y, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) \sim & \operatorname{Re} \frac{2L}{\operatorname{ch} \alpha \lambda} \left(\frac{p}{\operatorname{sh} \pi \lambda} - \frac{q}{\operatorname{ch} \pi \lambda} \right) e^{i \frac{\alpha \lambda}{h_2} x} \operatorname{ch} \left(1 + \frac{y}{h_2} \right) \alpha \lambda \quad \text{quand} \quad x \rightarrow +\infty, \\ \varphi(x, y) \sim & \operatorname{Re} \frac{2M}{\operatorname{ch} \alpha \mu} \left(\frac{l}{\operatorname{sh} \pi \mu} - \frac{m}{\operatorname{ch} \pi \mu} \right) e^{-i \frac{\alpha \mu}{h_1} x} \operatorname{ch} \left(1 + \frac{y}{h_1} \right) \alpha \mu \quad \text{quand} \quad x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

On sait qu'on peut se donner arbitrairement l réel, m imaginaire pur.

On obtient p et q par les formules :

$$\begin{aligned} p \cdot K(0) &= l \cdot H(0), \\ q \cdot K\left(-\frac{i}{2}\right) &= -m \cdot H\left(\frac{i}{2}\right). \end{aligned}$$

Les formules qui précèdent permettent donc de faire le calcul complet de l'amplitude et de la phase de l'onde en aval quand on connaît les caractéristiques analogues de l'onde en amont.

Variations du rapport des amplitudes des ondes stationnaires en aval et en amont.

Désignons par Z_- et Z_+ les amplitudes à la surface libre de φ respectivement en amont et en aval :

$$Z_- = 2 |M| \left(\frac{l^2}{\text{sh}^2 \pi \mu} - \frac{m^2}{\text{ch}^2 \pi \mu} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Z_+ = 2 |L| \left(\frac{p^2}{\text{sh}^2 \pi \lambda} - \frac{q^2}{\text{ch}^2 \pi \lambda} \right)^{\frac{1}{2}},$$

et posons :

$$l = \frac{Z_-}{2 |M|} \text{sh } \pi \mu \cdot \cos \theta, \quad m = i \frac{Z_-}{2 |M|} \text{ch } \pi \mu \cdot \sin \theta,$$

d'où :

$$p = \frac{Z_-}{2 |M|} \frac{H(0)}{K(0)} \text{sh } \pi \mu \cos \theta, \quad q = -i \frac{Z_-}{2 |M|} \frac{H\left(\frac{i}{2}\right)}{K\left(-\frac{i}{2}\right)} \text{ch } \pi \mu \sin \theta$$

et :

$$Z_+ = Z_- \cdot \left| \frac{L}{M} \right| \cdot \left\{ \left(\frac{H(0)}{K(0)} \frac{\text{sh } \pi \mu}{\text{sh } \pi \lambda} \right)^2 \cos^2 \theta + \left(\frac{H\left(\frac{i}{2}\right)}{K\left(-\frac{i}{2}\right)} \frac{\text{ch } \pi \mu}{\text{ch } \pi \lambda} \right)^2 \sin^2 \theta \right\}^{\frac{1}{2}};$$

posant :

$$\tau_1 = \left| \frac{L}{M} \right| \frac{H(0)}{K(0)} \frac{\text{sh } \pi \mu}{\text{sh } \pi \lambda}, \quad \tau_2 = \left| \frac{L}{M} \right| \frac{H\left(\frac{i}{2}\right)}{K\left(-\frac{i}{2}\right)} \frac{\text{ch } \pi \mu}{\text{ch } \pi \lambda},$$

on voit que :

$$\frac{Z_+}{Z_-} = \sqrt{\tau_1^2 \cos^2 \theta + \tau_2^2 \sin^2 \theta}$$

reste compris entre τ_1 et τ_2 .

Désignant par γ_- et γ_+ les cambrures (rapport de l'amplitude à la longueur d'onde) en amont et en aval, on a aussi :

$$\frac{\gamma_+}{\gamma_-} = \frac{\text{th } \alpha \mu}{\text{th } \alpha \lambda} \cdot \sqrt{\tau_1^2 \cos^2 \theta + \tau_2^2 \sin^2 \theta}.$$

Supposons maintenant que la profondeur en aval tende vers 0, c'est-à-dire $\alpha \rightarrow 0$, b et α constants.

On a :

$$L = \frac{K(-\lambda + i) [(-\lambda + i) \text{th } \alpha (-\lambda + i) - b]}{-\text{th } \alpha \lambda - \frac{\alpha \lambda}{\text{ch}^2 \alpha \lambda}},$$

$$M = \frac{H(-\mu + i) [(-\mu + i) \text{th } \alpha (-\mu + i) - a]}{-\text{th } \alpha \mu - \frac{\alpha \mu}{\text{ch}^2 \alpha \mu}}.$$

Ainsi, quand $\lambda \rightarrow 0$, $L = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ et $M = O(1)$.

En s'aidant des équations fonctionnelles qui définissent $H(u)$ et $K(u)$ on peut voir aussi que dans les mêmes conditions :

$$H(0) = O(1), \quad K(0) = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

On déduit de là que lorsque $\lambda \rightarrow 0$, $\tau_2 \rightarrow \infty$ et τ_1 tend vers une limite finie non nulle.

Ainsi, $\frac{Z_+}{Z_-}$ devient infini comme $\frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire comme $\frac{1}{\sqrt{h_2}}$, sauf si $\theta = 0$, c'est-à-dire pour une valeur particulière de la phase de l'onde en amont.

Calcul du coefficient de réflexion des ondes.

Nous avons supposé jusqu'ici l et p réels, m et q imaginaires purs de façon à obtenir des résultats réels.

Mais la théorie demeure valable si l'on rejette ces restrictions, ce qui facilite le calcul du coefficient de réflexion des ondes.

Supposons en effet qu'on ait en amont un train d'ondes progressives, c'est-à-dire :

$$\frac{l}{\operatorname{sh} \pi \mu} - \frac{m}{\operatorname{ch} \pi \mu} = 0;$$

on obtient pour expression du potentiel en aval :

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{L}{\operatorname{ch} \alpha \lambda} \cdot \left(\frac{p}{\operatorname{sh} \pi \lambda} - \frac{q}{\operatorname{ch} \pi \lambda} \right) \cdot e^{\frac{i \alpha \lambda}{h_2} x} \cdot \operatorname{ch} \alpha \lambda \left(1 + \frac{y}{h_2} \right) \\ + \frac{\bar{L}}{\operatorname{ch} \alpha \lambda} \cdot \left(\frac{p}{\operatorname{sh} \pi \lambda} + \frac{q}{\operatorname{ch} \pi \lambda} \right) e^{\frac{-i \alpha \lambda}{h_2} x} \operatorname{ch} \alpha \lambda \left(1 + \frac{y}{h_2} \right) \end{aligned}$$

et le coefficient de réflexion a pour valeur :

$$R(a, b, \alpha) = \frac{\left| \frac{p}{\operatorname{sh} \pi \lambda} + \frac{q}{\operatorname{ch} \pi \lambda} \right|}{\left| \frac{p}{\operatorname{sh} \pi \lambda} - \frac{q}{\operatorname{ch} \pi \lambda} \right|} = \frac{|\tau_1 - \tau_2|}{|\tau_1 + \tau_2|},$$

avec :

$$a = \frac{\sigma^2 h_2}{g \alpha}, \quad b = \frac{\sigma^2 h_1}{g \alpha}.$$

Calcul de τ_1 et de τ_2 .

Conservons l'hypothèse du paragraphe précédent l, m, p, q , complexes.

Si $\chi(\xi, \eta)$ est une solution du problème, la quantité conjuguée $\bar{\chi}(\xi, \eta)$ en est une autre et appliquant le théorème de Green à la transformation de l'intégrale double de

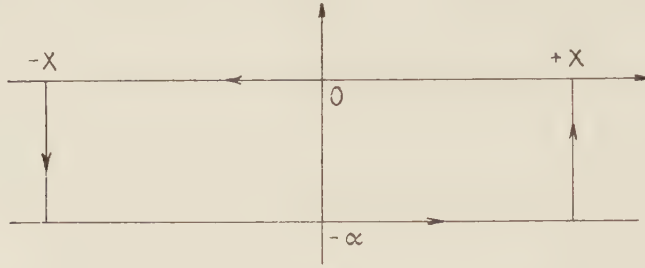


Fig. 31

$\chi \Delta \bar{\chi} - \bar{\chi} \Delta \chi$ étendue au rectangle figuré ci-dessus (fig. 31) on obtient, compte tenu des conditions aux limites :

$$\int_{x-i\alpha}^x \left(\chi \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \xi} - \bar{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) d\eta = \int_{-x-i\alpha}^{-x} \left(\chi \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \xi} - \bar{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) d\eta.$$

Or, on a :

$$\chi = (Ae^{i\lambda\xi} + Be^{-i\lambda\xi}) \operatorname{ch}(\alpha + \eta) \lambda \quad \xi \rightarrow +\infty,$$

$$\chi = (Ce^{i\mu\xi} + De^{-i\mu\xi}) \operatorname{ch}(\alpha + \eta) \mu \quad \xi \rightarrow -\infty,$$

d'où l'on déduit :

$$(|A|^2 - |B|^2) \cdot (\operatorname{sh} 2\lambda\alpha + 2\lambda\alpha) = (|C|^2 - |D|^2) \cdot (\operatorname{sh} 2\mu\alpha + 2\mu\alpha).$$

Ce qui donne, en précisant les valeurs de A, B, C, D :

$$-\frac{|L|^2}{\operatorname{sh} \pi\lambda \operatorname{ch} \pi\lambda \operatorname{ch}^2 \alpha\lambda} \operatorname{Re} p\bar{q} \cdot (\operatorname{sh} 2\lambda\alpha + 2\lambda\alpha) = \frac{|M|^2}{\operatorname{sh} \pi\mu \operatorname{ch} \pi\mu \operatorname{ch}^2 \alpha\mu} \operatorname{Re} l\bar{m} (\operatorname{sh} 2\mu\alpha + 2\mu\alpha),$$

et compte tenu des relations entre l, m, p, q on trouve :

$$\tau^2 = \tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{2\mu\alpha + \operatorname{sh} 2\mu\alpha \operatorname{ch}^2 \alpha\lambda}{2\lambda\alpha + \operatorname{sh} 2\lambda\alpha \operatorname{ch}^2 \alpha\mu}.$$

Formons maintenant le rapport $\frac{\tau_1}{\tau_2}$. On a :

$$r^2 = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\operatorname{th} \pi\mu}{\operatorname{th} \pi\lambda} \cdot \frac{H(0)}{K(0)} \cdot \frac{K\left(-\frac{i}{2}\right)}{H\left(\frac{i}{2}\right)} = \frac{\operatorname{th} \pi\lambda}{\operatorname{th} \pi\mu}.$$

On en déduit :

$$\tau_1 = r \cdot \tau, \quad \tau_2 = \frac{r}{\tau}$$

et le coefficient de réflexion a pour valeur :

$$R = \left| \frac{\text{th } \pi \lambda - \text{th } \pi \mu}{\text{th } \pi \lambda + \text{th } \pi \mu} \right|.$$

On peut remarquer que τ ne dépend que de $\frac{\sigma^2}{g} h_1$ et $\frac{\sigma^2}{g} h_2$.

Si $\alpha \rightarrow 0$, toutes choses égales d'ailleurs, $r \rightarrow 1$, τ_1 et $\tau_2 \rightarrow \tau$, $R \rightarrow 0$.

CAS $b = 0$.

Il n'y a rien à changer à ce qui précède en ce qui concerne le comportement asymptotique quand $\xi \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire :

$$\chi(\xi, \eta) \sim \text{Re} \frac{2L}{\text{ch } \alpha \lambda} \cdot \left(\frac{p}{\text{sh } \pi \lambda} - \frac{q}{\text{ch } \pi \lambda} \right) e^{i\lambda \xi} \text{ch } (\alpha + \eta) \lambda$$

ou :

$$\varphi(x, y) \sim \text{Re} \frac{2L}{\text{ch } \alpha \lambda} \left(\frac{p}{\text{sh } \pi \lambda} - \frac{q}{\text{ch } \pi \lambda} \right) e^{\frac{i\alpha\lambda}{h} x} \text{ch } \alpha \lambda \left(1 + \frac{y}{h} \right)$$

quand $x \rightarrow +\infty$.

On sait, d'autre part, que $u = 0$ est un pôle double de $H(u)$ et $u = -i$ un zéro double pour $K(u)$.

Au voisinage de $u = 0$ on peut donc écrire :

$$\frac{m}{\text{ch } \pi u} H(u) = \frac{P}{u^2} + \frac{Q}{u} + \dots,$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{iu\xi} \frac{\text{ch } (\alpha + \eta) u}{\text{ch } \alpha u} \frac{m}{\text{ch } \pi u} H(u) du &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} e^{iu\xi} \frac{\text{ch } (\alpha + \eta) u}{\text{ch } \alpha u} \frac{m}{\text{ch } \pi u} H(u) du \\ &\quad - e^{-\frac{\xi}{2}} \frac{\text{ch } (\alpha + \eta)}{\text{ch } \frac{\alpha i}{2}} \frac{i}{2} \frac{m}{\pi i} H\left(\frac{i}{2}\right) - Q - P \frac{d}{du} \left[e^{-iu\xi} \frac{\text{ch } (\alpha + \eta) u}{\text{ch } \alpha u} \right]_{u=0} \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \chi(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} e^{iu\xi} \frac{\text{ch } (\alpha + \eta) u}{\text{ch } \alpha u} \frac{m}{\text{ch } \pi u} H(u) du \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} e^{-iu\xi} \frac{\text{ch } (\alpha + \eta) u}{\text{ch } \alpha u} \cdot \left(\frac{p}{\text{sh } \pi u} + \frac{q}{\text{ch } \pi u} \right) K(u) du + \frac{P}{\pi} K(0) - Q + Pi \cdot \xi. \end{aligned}$$

On conclut de là que lorsque $\xi \rightarrow -\infty$:

$$\chi(\xi, \eta) \sim \frac{P}{\pi} K(0) - Q + Pi \cdot \xi.$$

La transformation conforme qui permet de passer du plan ξ, η au plan x, y peut s'écrire, dans ces conditions :

$$x + iy = \frac{h}{\alpha} e^{z + i\epsilon}.$$

De sorte que :

$$\varphi(x, y) \sim \text{I.P. } i \left(\frac{\alpha r}{h} \right) + \frac{p}{\pi} K(0) - Q \quad \text{quand} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0.$$

Si l'on se donne arbitrairement p réel, q imaginaire pur, c'est-à-dire l'amplitude et la phase de l'onde au large, on obtiendra l et m par :

$$l = 0, \\ mH\left(\frac{i}{2}\right) = -qK\left(-\frac{i}{2}\right).$$

Toutes les solutions ainsi obtenues auront à l'origine une singularité logarithmique à l'exception, toutefois, de celle qui correspond à $m = q = l = 0$, p quelconque, pour laquelle la phase de l'onde à l'infini au large a une valeur bien déterminée.

Notons enfin que la fonction $\varphi(x, 0)$ obtenue est solution de l'équation intégrale (8) du chapitre II, les constantes p et q ayant été convenablement choisies en fonction de A et B .

EXAMEN DU CAS $a = b$.

Les formules d'Airy.

Il n'est pas sans intérêt de montrer que les solutions obtenues dans ce chapitre se réduisent, quand $a = b$ (fond plan horizontal), aux formules d'Airy bien connues.

En effet, si $a = b$, on a :

$$H(u) = K(u) = \frac{1}{u \operatorname{th} \alpha u - a},$$

et par suite :

$$p = l, \quad m = -q.$$

On peut donc écrire :

$$\chi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{iu\xi} \frac{\operatorname{ch}(\alpha + \eta)u}{\operatorname{ch} \alpha u} \cdot \left(\frac{l}{\operatorname{sh} \pi u} + \frac{m}{\operatorname{ch} \pi u} \right) \frac{du}{u \operatorname{th} \alpha u - a} \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_r e^{-iu\xi} \frac{\operatorname{ch}(\alpha + \eta)u}{\operatorname{ch} \alpha u} \cdot \left(\frac{l}{\operatorname{sh} \pi u} - \frac{m}{\operatorname{ch} \pi u} \right) \frac{du}{u \operatorname{th} \alpha u - a},$$

d'où l'on déduit, en désignant par Γ'' le symétrique de Γ par rapport à 0 (fig. 32) :

$$\chi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma + \Gamma''} e^{i u \xi} \frac{\text{ch}(\alpha + \eta) u}{\text{ch} \alpha u} \cdot \left(\frac{l}{\text{sh} \pi u} + \frac{m}{\text{ch} \pi u} \right) \frac{du}{u \text{th} \alpha u - a},$$

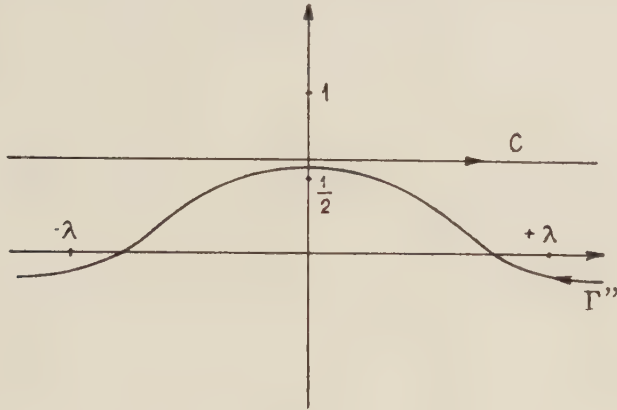


Fig. 32

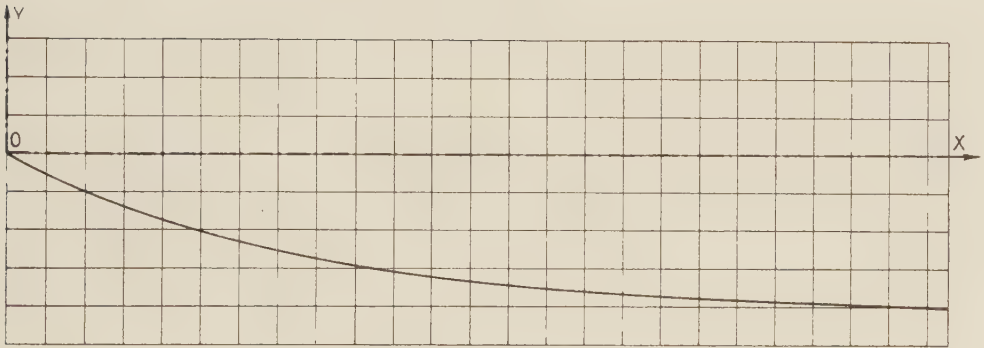


Fig. 33. — Profil de la plage pour $\alpha = 30^\circ$

et d'après le théorème de Cauchy (fig. 32) :

$$\chi(\xi, \eta) = (Ae^{i\lambda\xi} + Be^{-i\lambda\xi}) \cdot \text{ch}(\alpha + \eta) \lambda.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. MICHE. — *Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur constante ou décroissante*. Annales des Ponts et Chaussées, vol. 114, pp. 27-73; 131-164; 270-292; 369-406, 1944.
 - [2] J. J. STOKER. — *Surfaces waves on water of variable depth*. Quarterly of Applied Mathematics, vol. 5, n° 1, pp. 1-54, 1947.
 - [3] H. LEWY. — *Water waves on sloping beaches*. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 52, n° 9, pp. 737-775, 1946.
 - [4] E. ISAACSON. — *Water waves on sloping beaches*. Communications on Pure and Applied Mathematics, March 1950.
-

Les résultats contenus dans cette étude ont fait l'objet de plusieurs notes de l'auteur publiées dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences :

- C. R. tome 231, 1950, pp. 1212-1214;
- C. R. tome 232, 1951, pp. 211- 213;
- C. R. tome 232, 1951, pp. 303- 306;
- C. R. tome 232, 1951, pp. 479- 481;
- C. R. tome 233, 1951, pp. 844- 845;
- C. R. tome 233, 1951, pp. 916- 917;
- C. R. tome 234, 1952, pp. 297- 299.



IMPRIMERIE

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

THÉORÈMES ERGODIQUES

Vu et approuvé :

Paris, le 13 décembre 1951.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

A. CHATELET.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH.



IMPRIMERIE